Analisi 1

LEONARDO MIGLIORINI

Indice

Capitolo 1

Nozioni di base e linguaggio

1.1 Insiemi

Definizione 1.1 (Insieme)**.** Chiamiamo *insieme* una collezione di oggetti tale che si possa dire se un elemento gli appartiene o meno. Indichiamo con $\emptyset$ l'insieme tale che $x \notin \emptyset$ per qualsiasi x.

Definizione 1.2 (Predicato, Proposizione)**.** Si dice *predicato*, generalmente indicato con P, un'affermazione riguardante gli elementi di un insieme che è vera o falsa. Se le variabili del predicato assumono un valore definito o sono quantificate allora il predicato si dice *proposizione*.

Definizione 1.3 (Sottoinsieme)**.** Dato A un insieme, B è un *sottoinsieme di* A, e si indica con $B \subseteq A$, se $\forall x \in B$, $x \in A$. Se $B \neq A$ allora B si dice *sottoinsieme proprio di* A e si indica con $B \subset A$.

Definizione 1.4 (Operazioni)**.** Definiamo le seguenti operazioni tra insiemi:

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- $A \Delta B = \{(A \cap B \setminus (A \cap B)\}$
- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
- $A^c = X \setminus A$, con X un insieme ambiente

Definizione 1.5 (Insieme delle parti)**.** Dato un insieme A si definisce l'*insieme delle parti di* A, o *insieme potenza di* A, l'insieme $\mathcal{P}(A) = \{E \mid E \subseteq A\}$.

Definizione 1.6 (Partizione)**.** Dato A un insieme, $P \subset \mathcal{P}(A)$ si dice partizione di A se:

1. per ogni $E \in P$, $E \neq \emptyset$
2. per ogni $x \in A$ esiste $E \in P$ tale che $x \in E$
3. per ogni $E, F \in P$ con $E \neq F$, $E \cap F = \emptyset$

Definizione 1.7 (Cardinalità per insiemi finiti)**.** Dato A un insieme finito, si dice *cardinalità di* A il numero di elementi contenuti in A e si indica con $|A|$.

Osservazione 1.8. Se $B \subseteq A$ allora $|B| \leq |A|$.

1.2 Relazioni

Definizione 1.9 (Relazione)**.** Dati A e B due insiemi, si dice *relazione* tra elementi di A ed elementi di B un qualunque sottoinsieme $\mathcal{R}$ di $A \times B$. Se la coppia $(a, b) \in A \times B$ appartiene a $\mathcal{R}$, si dice che *a è in relazione* con b e si indica generalmente con $a\mathcal{R}b$ o $a \sim b$.

Definizione 1.10 (Relazione di equivalenza)**.** Una relazione $\mathcal{R}$ tra elementi di uno stesso insieme A si dice *di equivalenza* se valgono le seguenti proprietà:

- riflessiva: per ogni $a \in A$, $a\mathcal{R}a$
- simmetrica: per ogni $a, b \in A$, se $a\mathcal{R}b$ allora $b\mathcal{R}a$
- transitiva: per ogni $a, b, c \in A$ se $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ allora $a\mathcal{R}c$

Definizione 1.11 (Classe di equivalenza)**.** Dato A un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A si dice *classe di equivalenza* di un elemento $x \in A$ l'insieme $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\} \subseteq A$. Se la relazione è chiara dal contesto si indica generalmente con $[x]$ o con $\overline{x}$.

Definizione 1.12 (Insieme quoziente)**.** Dato A un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A si dice *insieme quoziente* di A per $\mathcal{R}$ l'insieme
$A/_{\mathcal{R}} = \{[x]_{\mathcal{R}} \mid x \in A\}$.

Proposizione 1.13. *Dato A un insieme, sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A. Allora $A/_{\mathcal{R}}$ è una partizione di A*

Dimostrazione.
Per ogni $x \in A$ si ha che x appartiene alla sua classe di equivalenza, pertanto $[x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. Inoltre, per ogni $x, y \in A$, per ogni $z \in [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}}$, se $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ allora $x\mathcal{R}z$ e $y\mathcal{R}z$, pertanto $x\mathcal{R}y$ e $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$. Infine per ogni $x \in A$ esiste una classe di equivalenza $[x]_{\mathcal{R}}$ tale che $x \in [x]_{\mathcal{R}}$, pertanto $A/_{\mathcal{R}}$ è una partizione di A.

□

Definizione 1.14 (Relazione d'ordine)**.** Una relazione $\mathcal{R}$ tra elementi di uno stesso insieme A si dice *d'ordine* o *ordinamento* se valgono le seguenti proprietà:

- riflessiva: per ogni $x \in A$, $x\mathcal{R}x$
- antisimmetrica: per ogni $x, y \in A$, se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ allora $x = y$
- transitiva: per ogni $x, y, z \in A$, se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ allora $x\mathcal{R}z$

Indichiamo con $\leq$ una generica relazione d'ordine.

Definizione 1.15 (Ordinamento totale)**.** Una relazione d'ordine $\leq$ su un insieme A si dice totale se per ogni $x, y \in A$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$. $B \subseteq A$ si dice *catena* se la relazione $\leq$ ristretta a B è totale.

Definizione 1.16 (Buon ordinamento)**.** Un insieme A totalmente ordinato da una relazione d'ordine $\leq$ si dice *ben ordinato* se per ogni $B \subseteq A$ non vuoto esiste $x \in B$ tale che $x \leq y$ per ogni $y \in A$.

Definizione 1.17 (Maggiorante, massimale)**.** Dato $(A, \leq)$ un insieme ordinato, $x \in A$ è un *maggiorante* per $B \subseteq A$ se per ogni $y \in B$ si ha $y \leq x$. $x \in A$ è un *massimale* se per ogni $y \in A$ con $x \leq y$ si ha $x = y$.

1.3 Funzioni

Definizione 1.18 (Funzione)**.** Dati A, B due insiemi una funzione f da A in B è una relazione $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ tale che per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ con $a\mathcal{R}b$ e si indica con $f : A \to B$. A si dice *dominio* di f, B si dice *codominio* di f.

Definizione 1.19 (Immagine)**.** Dati A, B due insiemi, $f : A \to B$ una funzione, si dice *immagine di A tramite f* l'insieme $\mathrm{Im}(f) = f(B) = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$.

Definizione 1.20 (Controimmagine)**.** Dati A, B due insiemi, $f : A \to B$ una funzione, si dice *controimmagine di B tramite f* l'insieme $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

Definizione 1.21 (Grafico)**.** Dati A, B due insiemi, $f : A \to B$ una funzione, si dice *grafico di f* l'insieme $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$.

Osservazione 1.22. Dato $\Gamma \subseteq A \times B$, per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in \Gamma$ se e solo se esiste una funzione $f : A \to B$ tale che $\Gamma = \Gamma_f$.

Definizione 1.23. Dati A, B due insiemi, $f : A \to B$ una funzione, f si dice *iniettiva* se per ogni $x, y \in A$ si ha $f(x) = f(y)$ se e solo se $x = y$. f si dice *surgettiva* se $f(A) = B$. f si dice *bigettiva* se f è iniettiva e surgettiva, cioè se è una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di A e gli elementi di B.

Definizione 1.24 (Funzione invertibile)**.** Dati A, B due insiemi, $f : A \to B$ una funzione, f si dice invertibile se per ogni $y \in B$ esiste un unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Indichiamo la funzione inversa di f con f^{-1}.

Osservazione 1.25. Se f è una funzione bigettiva allora è invertibile.

Definizione 1.26 (Funzione composta)**.** Dati A, B, C tre insiemi, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni, si dice *funzione composta di f e g* la funzione $g \circ f : \underset{x \ \mapsto g(f(x))}{A \longrightarrow C}$.

Osservazione 1.27. Se $f : A \to B$ è una funzione invertibile allora
$f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$, con $id_X : \underset{x \ \mapsto x}{X \to X}$ per un generico insieme X.

Capitolo 2

Insiemi infiniti

2.1 Assioma della scelta

Assioma 2.1 (Assioma della scelta)**.** Siano A, I insiemi infiniti e $\{A_i \mid i \in I\}$ una partizione di A, allora

$$\exists B \subseteq A \text{ tale che } B \cap A_i = x_i \ \forall i \in I.$$

Poiché una funzione induce una partizione del dominio e del codominio possiamo riformulare l'Assioma della scelta come:

Assioma 2.2 (Assioma della scelta II)**.** Dati A, B due insiemi infiniti

$$\forall f : A \to B \text{ surgettiva } \exists g : B \to A \text{ iniettiva tale che } f \circ g = id_B.$$

Una formulazione equivalente, generalmente più spendibile nelle dimostrazioni, è il seguente:

Teorema 2.3 (Lemma di Zorn)**.** *Dato $A \neq \emptyset$ un insieme su cui è definita una relazione d'ordine, se per ogni $B \subseteq A$ catena esiste $x \in A$ maggiorante per B allora esiste $\overline{x} \in A$ massimale per A.*

Un altro enunciato equivalente all'Assioma della scelta (e quindi al Lemma di Zorn) è il

Teorema 2.4 (Teorema di Zermelo)**.** *Ogni insieme ammette buon ordinamento.*

2.2 Cardinalità

Definizione 2.5 (Equipotenza)**.** Due insiemi A e B si dicono *equipotenti* se $|A| = |B|$, cioè se esiste una funzione $f : A \to B$ bigettiva.

Osservazione 2.6. In generale se esiste una funzione $f : A \to B$ iniettiva allora $|A| \leq |B|$, mentre se esiste una funzione $f : A \to B$ surgettiva allora $|A| \geq |B|$.

Definizione 2.7 (Funzione caratteristica)**.** Dato A un insieme, si dice *funzione caratteristica di A* la funzione

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

Proposizione 2.8. *Dato A un insieme finito,* $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Dimostrazione.
Sia $X = \{f : A \to \{0,1\}\}$, consideriamo la funzione $F : \underset{U}{\mathcal{P}(A)} \underset{\longmapsto \chi_U}{\to} X$. Osserviamo che F è iniettiva, infatti per ogni $U, V \in \mathcal{P}(A)$ con $U \neq V$ si ha che esiste $x \in U \setminus V$, pertanto $\chi_U \neq \chi_V$. Posta $f \in X$, consideriamo adesso $f^{-1}(1) = U \subseteq A$. Poiché $\mathrm{Im}(\chi_A) = \mathrm{Im}(f)$ e le due funzioni hanno lo stesso dominio si ha $\chi_A = f$, pertanto F è surgettiva, quindi bigettiva. Poiché $|X| = 2^{|A|}$ si ha $\mathrm{P}(A) = 2^{|A|}$.

$\square$

Definizione 2.9 (Insieme numerabile)**.** Un insieme A si dice *numerabile* se è finito o se $|A| = |\mathbb{N}|$, cioè se esiste una funzione $f : A \to \mathbb{N}$ bigettiva. Indichiamo la cardinalità di $\mathbb{N}$ con $\aleph_0$.

Teorema 2.10. *Dato A un insieme infinito esiste $B \subseteq A$ tale che $|B| = \aleph_0$.*

Dimostrazione.
Consideriamo la funzione $f : \mathcal{P}(A) \to A$ tale che $f(B) \in B$ per ogni $B \in \mathcal{P}(A)$. Sia $a_0 \in A$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ poniamo $a_{n+1} = f(A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\})$. Poiché $\mathrm{Im}(f) \subseteq A$ e $a_{n+1} \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha che $B = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme infinito contenuto in A ed è numerabile per costruzione.

$\square$

Teorema 2.11 (Teorema di Cantor)**.** *Dato A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A, allora $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Dimostrazione.
Consideriamo la funzione $f : \underset{a \longmapsto \{a\}}{A \to \mathcal{P}(A)}$, chiaramente f è iniettiva, pertanto $|A| \leq \mathcal{P}(A)$. Supponiamo per assurdo che sia $|A| = \mathcal{P}(A)$, cioè che f sia bigettiva. Consideriamo l'insieme
$B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \subseteq A$. Posto $\overline{x} = f^{-1}(B)$ si ha che $f(\overline{x}) \in B$, pertanto $\overline{x} \notin f(\overline{x})$ che è assurdo per costruzione di f, quindi $|A| < |\mathcal{P}(A)$.

$\square$

Teorema 2.12 (Teorema di Cantor-Bernstein)**.** *Dati A, B due insiemi, se esistono due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to A$ iniettive allora $|A| = |B|$.*

Capitolo 3

Insiemi numerici

3.1 Numeri naturali

Definizione 3.1 (Assiomi di Peano)**.** L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è definito dai seguenti assiomi:

- Esiste un numero naturale 0
- Ogni numero naturale n ammette un numero naturale successore, denotato come $S(n)$
- Non esiste un numero naturale n tale che $S(n) = 0$
- Numeri naturali diversi hanno successori diversi
- Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette un elemento minimo

L'ultimo assioma è chiamato *Principio del minimo*, ed è equivalente al principio di induzione.

Definizione 3.2. Dato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ indichiamo con $S^{-1}(n)$ il numero naturale m tale che $S(m) = n$.

Proposizione 3.3 (Principio di induzione)**.** *Sia $P(n)$ una proposizione definita per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se $P(0)$ è vera e $P(n)$ implica $P(S(n))$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione.
Consideriamo l'insieme $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è falsa } \}$, supponiamo per assurdo che sia $S \neq \emptyset$. Poiché $S \subset \mathbb{N}$, per il Principio del minimo esiste $m \in S$ tale che $m \leq s$ per ogni $s \in S$, inoltre $m > 0$ in quanto $P(0)$ è vera. Consideriamo $S^{-1}(m) \in \mathbb{N}$, osserviamo che $P(S^{-1}(m))$ è vera per minimalità di m, pertanto $P(S^{-1}(m))$ implica che $P(m)$ sia vera per ipotesi, che è assurdo per definizione di m. Pertanto $S = \emptyset$. □

Osservazione 3.4. Con una dimostrazione analoga si mostra che il principio di induzione è valido anche per una proprietà $P(n)$ definita per ogni $n \geq n_0$, con $n_0 \in \mathbb{N}$.

3.2 Numeri interi

Definizione 3.5 (Numeri interi)**.** Dati $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$. Definiamo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto indotte da $\mathbb{N}$, come l'insieme quoziente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}$. Supponendo $a \geq b$ identifichiamo $n = [(a, b)]$ e $-n = [(b, a)]$.

Proposizione 3.6 (Numerabilità)**.** *$\mathbb{Z}$ è un insieme numerabile.*

Dimostrazione.
Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tale che

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & n \text{ pari} \\ -\dfrac{n-1}{2} & n \text{ dispari} \end{cases}.$$

f è iniettiva, infatti:

- se $m, n \in \mathbb{N}$ sono entrambi pari si ha $f(m) = f(n)$ se e solo se $\dfrac{m}{2} = \dfrac{n}{2}$ se e solo se $m = n$
- se $m, n \in \mathbb{N}$ sono entrambi dispari si ha $f(m) = f(n)$ se e solo se $-\dfrac{m-1}{2} = -\dfrac{n-1}{2}$ se e solo se $m = n$
- se $m, n \in \mathbb{N}$ non hanno la stessa parità chiaramente si ha $m \neq n$ e $f(m) \neq f(n)$

f è surgettiva, infatti:

- se $a \in \mathbb{Z}$ e $a \geq 0$ allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = a$,in particolare $n = 2a$
- se $a \in \mathbb{Z}$ e $a < 0$ allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = a$, in particolare $n = -2a + 1$

Pertanto f è bigettiva, quindi $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

□

3.3 Numeri razionali

Definizione 3.7 (Numeri razionali)**.** Dati $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$. Definiamo l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, con le usuali operazioni di somma e prodotto indotte da $\mathbb{Z}$, come l'insieme quoziente $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/_\sim$ e identifichiamo $\dfrac{a}{b} = [(a, b)]$.

Osservazione 3.8. L'ordinamento "$\leq$" su $\mathbb{Q}$ indotto da $\mathbb{Z}$ è totale.

Proposizione 3.9 (Numerabilità)**.** $\mathbb{Q}$ *è un insieme numerabile.*

Dimostrazione.
Consideriamo la funzione $f : \underset{(a,b)}{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{\frac{a}{b}}{\mathbb{Q}}$, osserviamo che f è surgettiva, pertanto $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. È quindi sufficiente mostrare che $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Consideriamo la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che

$$g(n) = \begin{cases} (0, 0) & n = 0 \\ (a + 1, b - 1) & n > 1,\ g(n - 1) = (a, b) \text{ con } b \neq 0 \\ (0, a + 1) & n > 1,\ g(n - 1) = (a, 0) \end{cases},$$

g stabilisce una bigezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pertanto $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$. D'altra parte esiste un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ tale che $|A| = |\mathbb{N}|$, allora si ha $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, cioè $\mathbb{Q}$ è numerabile.

□

3.4 Numeri reali

Definizione 3.10 (Numeri reali, Assioma di Dedekind)**.** L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un campo ordinato per cui è valido il seguente assioma, detto *Assioma di Dedekind*:

Assioma 3.11 (Assioma di Dedekind)**.** Per ogni A, B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, per ogni coppia $(x, y) \in A \times B$ tale che $x < y$ esiste un elemento $z \in \mathbb{R}$ compreso tra x e y, cioè

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset,\ \forall (x, y) \in A \times B \ t.c.\ x < y\ \exists z \in \mathbb{R}\ t.c.\ x \leq z \leq y.$$

z si dice *elemento separatore di A e B.*

Definizione 3.12 (Estremo superiore, inferiore)**.** Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si definisce l'*estremo superiore di A* come il più piccolo dei maggioranti di A, se esiste, e si indica con $\sup(A)$. Analogamente si definisce l'*estremo inferiore di A* come il più grande dei minoranti di A, se esiste, e si indica con $\inf(A)$.

Definizione 3.13 (Insieme limitato)**.** Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice *superiormente limitato* se ammette un maggiorante, si dice *inferiormente limitato* se ammette un minorante. Se A ammette sia un maggiorante sia un minorante si dice *limitato.*

Osservazione 3.14. L'assioma di Dedekind è equivalente al seguente enunciato:

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ tale che } A \neq \emptyset \wedge A \text{ è superiormente limitato } \exists \sup(A) \in \mathbb{R}$$

Definizione 3.15 (Sezioni di Dedekind di $\mathbb{Q}$)**.** Una *sezione di Dedekind di* $\mathbb{Q}$ è una coppia $(A, B) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ tale che $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ e per ogni $a \in A$, per ogni $b \in B$ si ha $a < b$.

Al fine di poter mostrare una costruzione di $\mathbb{R}$ introduciamo alcuni concetti e risultati relativi alle sezioni di Dedekind e alla struttura di campo ordinato

3.4.1 Sezioni di Dedekind

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme delle sezioni di Dedekind di $\mathbb{Q}$. Osserviamo che ogni elemento di $\mathbb{Q}$ corrisponde a una sezione di $\mathbb{Q}$, infatti per ogni $q \in \mathbb{Q}$ la sezione (A_q, B_q) tale che $A_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$, $B_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq q\}$ identifica q con $\sup(A)$ (e con $\inf(B)$). Tuttavia il viceversa non è vero, basta considerare la sezione (A, B) tale che $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 2\}$. Dal momento che non esiste un numero razionale q tale che $q^2 = 2$ si ha $\sup(A) \notin \mathbb{Q}$.

Definizione 3.16. Definiamo (A_q, B_q) con $A_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$, $B_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq q\}$ la sezione di Dedekind relativa a $q \in \mathbb{Q}$.

Mostriamo adesso alcune proprietà delle sezioni:

Proposizione 3.17.

1. *Date (A, B), (A', B') due sezioni di Dedekind di $\mathbb{Q}$, la relazione*

$$(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$$

   è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}$.

2. *$\mathbb{R}$ rispetta l'Assioma di Dedekind.*

3. *L'applicazione $\varphi : \underset{q \ \mapsto (A_q, B_q)}{\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}}$ è strettamente crescente, quindi iniettiva.*

Dimostrazione.

1. La relazione di inclusione $\subseteq$ definisce chiaramente un ordinamento su $\mathbb{R}$, mostriamo quindi che è totale. Siano (A, B), (A', B') sezioni di $\mathbb{Q}$, supponiamo $(A', B') \nleq (A, B)$, cioè $A' \nsubseteq A$. Sia $p \in A' \setminus A$, poiché (A, B) è una sezione di $\mathbb{Q}$, per ogni $q \in A$ si ha che $q < p$, cioè $A \subseteq A_p$. D'altra parte, poiché $p \in A'$, si ha che $A_p \subseteq A'$, pertanto $A \subseteq A'$ e $(A, B) \leq (A', B')$.

2. Sia (X, Y) una sezione di $\mathbb{R}$ (cioè X, $Y \neq \emptyset$, $X \cup Y = \mathbb{R}$, $X \cap Y = \emptyset$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, $x < y$), osserviamo che gli elementi di X e di Y sono sezioni di $\mathbb{Q}$. Poniamo

$$A_0 = \bigcup_{(A,B) \in X} A;$$
$$B_0 = \bigcap_{(A,B) \in X} B;$$

   si ha che (A_0, B_0) è una sezione di $\mathbb{Q}$:

   (a) $A_0 \cup B_0 = \mathbb{Q}$, infatti posto $r \in \mathbb{Q}$ e $r \notin B_0$ si ha che esiste $(A, B) \in X$ sezione di $\mathbb{Q}$ tale che $r \notin B$, cioè $r \in A$ e in particolare $r \in A_0$.

   (b) $A_0 \cap B_0 = \emptyset$, infatti posto $r \in A_0$ si ha che esiste $(A, B) \in X$ sezione di $\mathbb{Q}$ tale che $r \in A$, pertanto $r \notin B$ e di conseguenza $r \notin B_0$.

   (c) Per ogni $p \in A_0$, per ogni $q \in B_0$, si ha $p < q$, infatti esiste $(A, B) \in X$ sezione di $\mathbb{Q}$ tale che $p \in A$ e $q \in B$, pertanto $p < q$.

La sezione (A_0, B_0) definisce quindi un numero reale λ, mostriamo adesso che λ è l'elemento separatore di (X, Y). Mostriamo che $\lambda \geq \alpha$ per ogni $\alpha \in X$ fissato $\alpha \in X$, in particolare si ha $\alpha \in A$ e quindi $\alpha \in A_0$. Di conseguenza $\alpha \leq \lambda$. Consideriamo adesso $\beta = (C, D) \in Y$, poiché $\alpha < \beta$ per ogni $\alpha \in X$, si ha $A \subseteq C$ per ogni $(A, B) \in X$, dunque $A_0 \subseteq C$. Pertanto $\lambda \leq \beta$, cioè λ separa X e Y.

3. Siano $q, q' \in \mathbb{Q}$, supponiamo senza perdita di generalità $q < q'$. Poste (A_q, B_q) e $(A_{q'}, B_{q'})$ le sezioni definite rispettivamente da q e q', poiché $q < q'$ si ha $q \in A_{q'} \setminus A_q$, pertanto $A_q \subset A_{q'}$ e quindi $(A_q, B_q) < (A_{q'}, B_{q'})$. Da questo si deduce che φ è strettamente decrescente.

□

Osservazione 3.18. Siano (A, B), $(A', B') \in \mathbb{R}$ tali che $(A, B) \leq (A', B')$, allora $B' \subseteq B$. Infatti $(A, B) \leq (A', B')$ se e solo se $A \subseteq A' \implies (\mathbb{R} \setminus A') \subseteq (\mathbb{R} \setminus A)$, ma $\mathbb{R} \setminus A' = B'$ e $\mathbb{R} \setminus A = B$ in quanto (A, B) e (A', B') sono sezioni di $\mathbb{Q}$, pertanto $B' \subseteq B$.

Definiamo adesso delle operazioni su $\mathbb{R}$.

Definizione 3.19 (Somma di sezioni)**.** Dati (A, B), $(A', B') \in \mathbb{R}$ definiamo

$$(A, B) + (A', B') = (A + A', B + B'),$$

dove per due generici insiemi H, K intendiamo $H + K = \{h + k \mid h \in H \wedge k \in K\}$.

Proposizione 3.20.

1. *Date (A, B), (A', B') due sezioni di $\mathbb{Q}$, $(A, B) + (A', B')$ è una sezione di Dedekind di $\mathbb{Q}$.*

2. *La somma di sezioni è associativa e commutativa.*

3. *Per ogni p, $p' \in \mathbb{Q}$, $(A_p, B_p) + (A_{p'}, B_{p'}) = (A_{p+p'}, B_{p+p'})$.*

Dimostrazione.

1. Dalla definizione di somma delle sezioni abbiamo $A + A' \neq \emptyset$ e $B + B' \neq \emptyset$. Inoltre per ogni $a \in A$, per ogni $a' \in A'$, si ha $a+a' < b+b'$ per ogni $b \in B$, per ogni $b' \in B'$ in quanto se $a < b$ e $a' < b'$ allora $a+a' < b+b'$, in particolare $(A+A') \cap (B+B') = \emptyset$. Mostriamo adesso che $(A+A') \cup (B+B') = \mathbb{Q}$. Siano $q \in A$, $q' \in A'$, $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r < q+q'$, allora $r - q < q'$, pertanto $r \in A+A'$. Analogamente si dimostra che per ogni $p \in B$, per ogni $p' \in B'$, per ogni $s \in \mathbb{Q}$ tali che $s > p+p'$ si ha $s \in B+B'$. Da questo possiamo dedurre che $\sup(A+A') = \sup(A)+\sup(A') = \inf(B)+\inf(B') = \inf(B+B')$. Pertanto abbiamo

$$A + A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sup(A) + \sup(A')\}$$
$$B + B' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \inf(B) + \inf(B')\},$$

da cui è evidente che $(A + A') \cup (B + B') = \mathbb{Q}$, pertanto $(A + A', B + B')$ è una sezione di $\mathbb{Q}$.

2. Le due proprietà seguono dalla definizione di somma tra sezioni, in quanto indotta dalla somma in $\mathbb{Q}$ che è associativa e commutativa.

3. Poiché $A_p \subseteq A_{p+p'}$ si ha $(A_p, B_p) \leq (A_{p+p'}, B_{p+p'})$. Sia adesso $r \in (A_{p+p'}, B_{p+p'})$, abbiamo che $r = p+(r-p)$, pertanto $r-p \in (A_{p'}, B_{p'})$. Poiché A_p e $A_{p'}$ non contengono i loro estremi superiori, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $r-p+\varepsilon \in A_{p'}$ e $p-\varepsilon \in A_p$, pertanto si ha $r \in (A_p+A_{p'})$, cioè $A_{p+p'} \subseteq A_p+A_{p'}$.

□

Definizione 3.21. Data (A_q, B_q) una sezione relativa a $q \in \mathbb{Q}$, definiamo $-(A_q, B_q) = (A_{-p}, B_{-p})$ (sorvoliamo sulla definizione nel caso in cui la sezione non sia relativa a un numero razionale in quanto più complicata).

Vale inoltre il seguente enunciato (di cui non daremo dimostrazione):

Proposizione 3.22. *Per ogni sezione di $\mathbb{Q}$ (A, B) si ha $(A, B) + (A_0, B_0) = (A, B)$ e $(A, B) + (-(A, B)) = (A_0, B_0)$.*

Definizione 3.23 (Sezioni non negative)**.** Una sezione di $\mathbb{Q}$ (A, B) si dice *non negativa* se $(A_0, B_0) \leq (A, B)$, cioè se $A_0 \subseteq A$.

Definizione 3.24 (Prodotto tra sezioni non negative)**.** Dati (A, B), $(A', B') \in \mathbb{R}$ definiamo $(A, B) \cdot (A', B') = (AA', BB')$ con

$$AA' = \{qq' \in \mathbb{Q} \mid q, q' \geq 0,\ q \in A,\ q' \in A'\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$$
$$BB' = \{qq' \in \mathbb{Q} \mid q \in B,\ q' \in B'\}$$

Con verifiche analoghe a quelle precedenti si dimostrano le seguenti proprietà

- il prodotto di due sezioni negative è una sezione non negativa
- per ogni $p, p' \in \mathbb{Q}$ non negativi $(A_p, B_p)(A_{p'}, B_{p'}) = (A_{pp'}, B_{pp'})$
- il prodotto è associativo e commutativo
- per ogni (A, B) sezione non negativa si ha $(A, B)(A_1, B_1) = (A, B)$, $(A, B)(A_0, B_0) = (A_0, B_0)$
- per ogni $(A, B) \neq (A_0, B_0)$ è possibile definire $(A, B)^{-1}$ tale che $(A, B)(A, B)^{-1} = (A_1, B_1)$

Possiamo inoltre estendere il prodotto alle sezioni negative e a segni discordi.
Abbiamo dato una costruzione di $\mathbb{R}$ tramite le sezioni di Dedekind e abbiamo mostrato che $\mathbb{R}$ rispetta l'Assioma di Dedekind, diamo adesso delle definizioni e dei risultati collegati alla struttura di campo ordinato.

3.4.2 Campi ordinati

Definizione 3.25 (Campo)**.** Un insieme $\mathbb{F}$ dotato di due operazioni, indicate con "+" e "$\cdot$", dette rispettivamente di somma e prodotto si dice *campo* se valgono le seguenti proprietà:

- per ogni $x, y \in \mathbb{F}$, $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$
- per ogni $x, y, z \in \mathbb{F}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Le due operazioni ammettono elementi neutri distinti, indicati generalmente con 0 e 1 rispettivamente, tali che per ogni $x \in \mathbb{F}$, $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$
- per ogni $x \in \mathbb{F}$ esiste $x' \in \mathbb{F}$ tale che $x + x' = 0$
- per ogni $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ esiste $x'' \in \mathbb{F}$ tale che $x \cdot x'' = 1$

Teorema 3.26. *L'insieme $\mathbb{R}$ delle sezioni di $\mathbb{Q}$, dotato delle operazioni di somma e prodotto sopra definite, è un campo dove gli elementi neutri per la somma e per il prodotto sono rispettivamente le sezioni (A_0, B_0), (A_1, B_1).*

(La dimostrazione di questo teorema non è difficile, tuttavia è lunga e noiosa, pertanto sorvoleremo su questa).

Definizione 3.27 (Campo ordinato)**.** Un campo $\mathbb{F}$ si dice *ordinato* se è dotato di un ordinamento totale "$\leq$" compatibile con le sue operazioni, cioè tale che:

- per ogni x,y,$z \in \mathbb{F}$, se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$
- se $x,\ y \geq 0_{\mathbb{F}}$ allora $x \cdot y \geq 0_{\mathbb{F}}$ per ogni $x,\ y \in \mathbb{F}$

(In generale per $a \geq b$ intendiamo $b \leq a$ e indichiamo con $0_{\mathbb{F}}$ l'elemento neutro per la somma nel campo $\mathbb{F}$).

Osservazione 3.28. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono campi ordinati.

Definizione 3.29 (Omomorfismo di campi)**.** Dati $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}'$ due campi, si dice *omomorfismo da $\mathbb{F}$ in $\mathbb{F}'$* un'applicazione $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ non identicamente nulla tale che:

1. per ogni $x, y \in \mathbb{F}$, $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. per ogni $x, y \in \mathbb{F}$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

Se φ è un omomorfismo bigettivo si dice *isomorfismo*, e i campi $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}'$ si dicono *isomorfi*.

Osserviamo che dato un campo ordinato $\mathbb{F}$, possiamo costruire una copia isomorfa di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{F}$, che indicheremo con $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ sommando ripetutamente $1_{\mathbb{F}}$ a se stesso. Con le stesse costruzioni già utilizzate otteniamo anche una copia di $\mathbb{Z}$ e una copia di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{F}$, che indicheremo rispettivamente con $\mathbb{Z}_{\mathbb{F}}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$.

Definizione 3.30 (Proprietà archimedea)**.** Un campo ordinato $\mathbb{F}$ si dice *archimedeo* se per ogni $a, b \in \mathbb{F}$ tali che $0 < a < b$ esiste $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ per cui $b < na$.

Definizione 3.31 (Densità)**.** Dato $\mathbb{F}$ un campo ordinato, $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{F}$ un suo sottocampo, $\mathcal{Q}$ si dice *denso* in $\mathbb{F}$ se per ogni $x, y \in \mathbb{F}$ esiste $q \in \mathcal{Q}$ tale che $x < q < y$.

Proposizione 3.32. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato, i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *$\mathbb{F}$ è archimedeo*
2. *$\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ non è superiormente limitato*
3. *$\inf\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}^*\} = 0_{\mathbb{F}}$, con $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}^* = \mathbb{N}_{\mathbb{F}} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}$*
4. *$\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ è denso in $\mathbb{F}$*

Dimostrazione.

($1 \iff 2$). Se $\mathbb{F}$ è archimedeo, siano x, $y \in \mathbb{F}$ tali che $x > 0$ e $y = 1_{\mathbb{F}}$, allora esiste $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ tale che $n \cdot 1_{\mathbb{F}} > x$, pertanto $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ non ha maggioranti. Viceversa se $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ non è superiormente limitato, dati x, $y > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ tale che $n > \dfrac{y}{x}$, ovvero $\mathbb{F}$ è archimedeo.

($2 \iff 3$). Se $\inf\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}^*\} = 0_{\mathbb{F}}$ allora per ogni $x > 0_{\mathbb{F}}$ esiste $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}^*$ tale che $\dfrac{1}{n} < x$. Sostituendo $y = x^{-1}$ si ha che $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ non è superiormente limitato. Viceversa, se $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ non è superiormente limitato si ha che per ogni $x > 0_{\mathbb{F}}$ esiste $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ tale che $n > x$. Sostituendo $y^{-1} = x$ si ha che $\inf\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}\} = 0_{\mathbb{F}}$.

($3 \iff 4$). Siano x, $y \in \mathbb{F}$, se $xy < 0$ allora $x < 0_{\mathbb{F}} < y$ oppure $y < 0_{\mathbb{F}} < x$. Supponiamo quindi che x e y siano concordi e, a meno di passare agli opposti, consideriamo il caso $0_{\mathbb{F}} < x < y$. Sia $\delta = y - x > 0_{\mathbb{F}}$, esiste $k \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}^*$ tale che $k^{-1} < \delta$. Consideriamo l'insieme $S = \{nk^{-1} \mid n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}\}$, poiché $\mathbb{F}$ è archimedeo S contiene elementi maggiori di x. Sia allora $m \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}^*$ tale che $mk^{-1} > x$, si ha che $(m-1)k^{-1} \leq x$, in particolare

$$mk^{-1} = (m-1)k^{-1} + k^{-1} < x + \delta = y,$$

pertanto $x < mk^{-1} < y$ e quindi $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ è denso in $\mathbb{F}$. Viceversa dato $x > 0_{\mathbb{F}}$ esiste $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ tale che $0_{\mathbb{F}} < \dfrac{m}{n} < x$ in quanto $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ è denso in $\mathbb{F}$, in particolare $n^{-1} < x$ per ogni $x > 0_{\mathbb{F}}$.

□

Definizione 3.33 (Campo ordinato completo)**.** Un campo ordinato si dice *completo* se rispetta l'Assioma di Dedekind

Proposizione 3.34. *Ogni campo ordinato e completo è archimedeo.*

Dimostrazione.
Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato e completo, supponiamo per assurdo che $\mathbb{F}$ non sia archimedeo, cioè esistono $a, b \in \mathbb{F}$ tali che $0 < a < b$ e $b \geq na$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme $S = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ è non vuoto e superiormente limitato, pertanto ammette estremo superiore. Sia $\sigma = \sup(S)$, per definizione di estremo superiore esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\sigma - a < ka$, cioè $\sigma < (k+1)a \in S$, che è assurdo. Pertanto S non è superiormente limitato, cioè $\mathbb{F}$ è archimedeo.

□

Osservazione 3.35.

- $\mathbb{R}$ è archimedeo.
- $\mathbb{Q}$ è archimedeo, infatti dati due elementi $\dfrac{p}{q} < \dfrac{p'}{q'}$ è sufficiente considerare la media aritmetica tra i due per ottenere un terzo elemento $\dfrac{m}{n}$ tale che $\dfrac{p}{q} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{p'}{q'}$.

Dato $\mathbb{F}$ un campo ordinato archimedeo, indichiamo con $\overline{\mathbb{F}}$ l'insieme delle sezioni di Dedekind di $\mathbb{F}$ e definiamo le operazioni di somma e prodotto come sopra. In modo analogo si dimostra che

- $\overline{\mathbb{F}}$ è un campo totalmente ordinato dall'ordinamento indotto dall'inclusione delle sezioni di Dedekind
- $\overline{\mathbb{F}}$ è completo
- l'applicazione
$$\varphi : \mathbb{F} \underset{x \mapsto (A_x, B_x)}{\longrightarrow} \overline{\mathbb{F}}$$
stabilisce un isomorfismo tra $\mathbb{F}$ e un sottocampo denso in $\overline{\mathbb{F}}$. Chiamiamo il campo $\overline{\mathbb{F}}$ il *completamento* di $\mathbb{F}$.
- Se $\mathbb{F}$ è un campo ordinato e completo allora $\mathbb{F}$ e $\overline{\mathbb{F}}$ sono isomorfi.

Teorema 3.36. *Dato $\mathbb{F}$ un campo ordinato archimedeo, $\overline{\mathbb{F}}$ è isomorfo a $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione.
Consideriamo l'applicazione $\psi : \overline{\mathbb{F}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}}$ tale che $\psi((A, B)) \mapsto (A \cap \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}, B \cap \mathbb{Q}_{\mathbb{F}})$ (Per semplicità di notazione d'ora in poi scriveremo $\psi(A, B)$). Chiaramente $\psi(A, B)$ è una sezione di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$, mostriamo che ψ è un isomorfismo.
Sia $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ il sottocampo di $\mathbb{F}$ isomorfo a $\mathbb{Q}$, per la densità di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ in $\mathbb{F}$, date due sezioni (A, B), $(A', B') \in \overline{\mathbb{F}}$ tali che $(A, B) < (A', B')$, esiste $q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ tale che $q \in A' \setminus A$, pertanto $\psi(A, B) < \psi(A', B')$, cioè ψ è strettamente crescente e quindi iniettiva. Consideriamo adesso $(A, B) \in \overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}}$ una sezione di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$, poniamo (A', B') una sezione di $\mathbb{F}$ tale che $A' = \{x \in \mathbb{F} \mid \exists y \in A \text{ con } x < y\}$ e $B = \mathbb{F} \setminus A$. Per la densità di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ in $\mathbb{F}$ si verifica che $\psi(A', B') = (A, B)$, pertanto ψ è bigettiva. Similmente si mostra che $\psi((A, B) + (A', B')) = \psi(A, B) + \psi(A', B')$ e che $\psi((A, B)(A', B') = \psi(A, B)\psi(A', B')$, cioè ψ è un isomorfismo.
Consideriamo adesso l'isomorfismo φ tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$, data una sezione di $\mathbb{Q}$ (A, B) chiaramente $\varphi(A, B)$ è una sezione di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$, possiamo quindi estendere φ a un isomorfismo $\overline{\varphi}$ tra $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}}$. Pertanto l'applicazione

$$\psi^{-1} \circ \overline{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}$$

è un isomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{F}}$.

□

Abbiamo finalmente dimostrato che $\mathbb{R}$ è l'unico campo ordinato, completo e archimedeo a meno di isomorfismo. Proviamo adesso un ultimo risultato sulla cardinalità di $\mathbb{R}$

Proposizione 3.37. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Dimostrazione.
Abbiamo costruito $\mathbb{R}$ come l'insieme delle sezioni di Dedekind di $\mathbb{Q}$ (A, B), con $(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q}))$, pertanto esiste una funzione iniettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. D'altra parte una sezione di $\mathbb{Q}$ (A, B) è univocamente determinata dall'insieme $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, e poiché $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ si ha che $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Abbiamo mostrato che $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |X|$, con $X = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 2\}\}$, definiamo quindi una funzione $g : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(f) = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} f(i).$$

g associa a ogni elemento di X un numero reale che, letto in base 3, ha uno sviluppo decimale infinito composto solo da 0 e 2. Per ogni $f, f' \in X$ con $f \neq f'$ si ha che $g(f) \neq g(f')$ in quanto i due sviluppi in base 3 differiscono di almeno una cifra, pertanto g è iniettiva. Allora per il teorema di Cantor-Bernstein si ha che $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

□

3.4.3 Potenze con esponente reale

Definizione 3.38 (Radice n-esima)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ diciamo che x è una *radice n-esima di y* se l'equazione $x^n = y$ è vera. Possiamo indicare x con $\sqrt[n]{y}$ oppure $y^{\frac{1}{n}}$.

Proposizione 3.39 (Esistenza e unicità della radice)**.** *Per ogni $y \in \mathbb{R}$ con $y \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$.*

Dimostrazione.

(Esistenza). Sia $x = \sup\{z \in \mathbb{R} \mid z^n \leq y\}$, mostriamo che $x^n = y$. Per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $(x-\varepsilon)^n \leq z^n \leq y < (x+\varepsilon)^n$ e $(x-\varepsilon)^n < x^n < (x+\varepsilon)^n$. Pertanto $|x^n - y| \leq (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n = \varepsilon C$, per qualche $C > 0 \in \mathbb{R}$. Per l'arbitrarietà di ε possiamo concludere che $x^n = y$.

(Unicità). Consideriamo $x \in R$ una radice n-esima di y, senza perdere di generalità possiamo supporre $x > 0$. Sia $z \in \mathbb{R}$ un'altra radice n-esima di y, chiaramente se $z < x$ si ha $z^n < x^n = y$, pertanto $z \geq x$. Supponiamo per assurdo $z > x$, allora $z^n > x^n$, cioè $z^n > y$, che è assurdo. Pertanto $z = x$.

□

Definizione 3.40 (Potenze a esponente reale)**.** Per $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ definiamo a^b:

($a > 1$). $a^b = \sup\{a^q \mid q < b,\ q \in \mathbb{Q}\}$

($a < 1$). $a^b = \inf\{a^q \mid q < b,\ q \in \mathbb{Q}\}$

($a = 1$). $a^b = a$

Se $b \in \mathbb{Q}$, cioè $b = \dfrac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, possiamo definire a^b in modo equivalente come

$$a^b = \begin{cases} (a^{\frac{1}{n}})^m & m > 0 \\ 1 & m = 0 \\ \dfrac{1}{(a^{\frac{1}{n}})^{-m}} & m < 0 \end{cases}$$

Valgono le usuali proprietà delle potenze:

- $a^{b+c} = a^b a^c$
- $(ab)^c = a^c b^c$
- $a^b > 0$
- $a^0 = 1$
- $1^b = 1$
- se $a > 1$ e $b < c$ allora $a^b < a^c$
- se $a < 1$ e $b < c$ allora $a^b > a^c$

3.5 Numeri complessi

Definizione 3.41 (Unità immaginaria)**.** Chiamiamo *unità immaginaria* il simbolo i tale che $i^2 = -1$.

Definizione 3.42 (Numeri complessi)**.** Definiamo l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* come l'insieme formato da tutte le somme e prodotti formali di i con elementi di $\mathbb{R}$. Equivalentemente possiamo descrivere $\mathbb{C}$ come l'insieme $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Osservazione 3.43. Dall'identificazione $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ abbiamo una naturale corrispondenza tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Definizione 3.44 (Somma, prodotto)**.** Definiamo su $\mathbb{C}$ una somma e un prodotto indotti da quelli su $\mathbb{R}$.

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Osservazione 3.45. Si verifica che queste operazioni sono ben definite e forniscono a $\mathbb{C}$ una struttura di campo che estende quella di $\mathbb{R}$, tuttavia l'ordinamento indotto da $\mathbb{R}$ non è totale su $\mathbb{C}$. Infatti se supponiamo $i < 0$ si ha $i^2 > 0$, che è assurdo in quanto $i^2 = -1$. D'altra parte se fosse $i > 0$ si avrebbe $i^2 > 0$, che è assurdo. Poiché chiaramente $i \neq 0$ si ha che "$\leq$" non è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{C}$.

Definizione 3.46 (Parte reale, immaginaria)**.** Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$ si dicono *parte reale* e *parte immaginaria* di z rispettivamente le funzioni $\Re(z) = a$, $\Im(z) = b$.

La scrittura di un numero complesso come $a+ib$ è detta *forma cartesiana*. Sfruttando la naturale bigezione tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ possiamo descrivere un numero complesso in modo alternativo tramite le sue coordinate polari (o in *forma trigonometrica*) rispetto al punto $(0, 0)$:

$$z = a + ib = \rho \cos \vartheta + i\rho \sin \vartheta = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Chiamiamo ρ il *modulo* di z (rappresentando z sul piano complesso si vede che $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$), e $\vartheta = arg(z)$ l'*argomento* di z. Osserviamo che $arg(z)$ non è univoco (ha un periodo di 2π), definiamo quindi l'*argomento principale* di z come $Arg(z) = arg(z)$ tale che $Arg(z) \in [0, 2\pi)$. La forma trigonometrica risulta particolarmente utile per calcolare il prodotto di numeri complessi, infatti dati
$z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$ si ha

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + i(\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1) = \\ = \rho_1\rho_2(\cos \vartheta_1 + \vartheta_2 + i \sin \vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

Osservazione 3.47 (Legge di De Moivre)**.** $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i \sin (n\vartheta)$.

Definizione 3.48 (Forma esponenziale)**.** Ponendo $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ (daremo una dimostrazione di questa formula più avanti, utilizzando le serie di Taylor) possiamo scrivere un numero complesso
$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ in *forma esponenziale*: $z = \rho e^{i\vartheta}$. Poiché la funzione $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva, possiamo scrivere $\rho = e^{\varphi}$ per un opportuno $\varphi \in \mathbb{R}$, pertanto abbiamo $z = e^{\varphi} e^{\vartheta} = e^{\varphi+\vartheta}$.

Definizione 3.49 (Coniugato)**.** Dato $z = a+ib = \rho e^{iarg(z)}$ chiamiamo *coniugato di* z il numero complesso $\overline{z} = a - ib = \rho e^{-iarg(z)}$.

Radici n-esime in $\mathbb{C}$

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione $z^n = w$ con $z, w \in \mathbb{C}$. Scrivendo z e w in forma esponenziale si ha

$$(|z|e^{iarg(z)})^n = |w|e^{i(Arg(w)+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo quindi $|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$ e $Arg(z) = \dfrac{Arg(w) + 2k\pi}{n}$, con $k \in \mathbb{Z}$ tale che
$Arg(z) \in [0, 2\pi)$. Osserviamo che per $|w| \neq 0$ abbiamo n radici distinte che si dispongono sul piano complesso come i vertici di un poligono regolare di n lati

3.5.1 Teorema Fondamentale dell'Algebra

Definizione 3.50 (Campo algebricamente chiuso)**.** Un campo $\mathbb{F}$ si dice *algebricamente chiuso* se ogni polinomio non costante a coefficienti in $\mathbb{F}$ ammette una radice in $\mathbb{F}$.

Teorema 3.51 (Fondamentale dell'Algebra)**.** *Ogni polinomio non costante a coefficienti in $\mathbb{C}$ ammette una radice in $\mathbb{C}$.*

Corollario 3.52. *Ogni polinomio non costante a coefficienti in $\mathbb{C}$ si fattorizza in polinomi di primo grado a coefficienti in $\mathbb{C}$.*

Corollario 3.53. *Ogni polinomio non costante a coefficienti in $\mathbb{R}$ si fattorizza in polinomi di grado 1 o 2 irriducibili in $\mathbb{R}$. Inoltre se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di un polinomio a coefficienti reali, allora anche $\overline{\alpha}$ è una radice.*

Corollario 3.54. *Ogni polinomio non costante a coefficienti reali ha un numero pari (possibilmente 0) di radici non reali.*

Capitolo 4

Topologia in $\mathbb{R}^n$

4.1 Distanza, insiemi aperti e chiusi

Definizione 4.1 (Distanza)**.** Dato un insieme E, una distanza (o metrica) su E è una funzione $d : E \times E \to [0, +\infty)$ tale che:

- $d(x, x) = 0$ per ogni $x \in E$
- $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in E$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ per ogni $x, y, z \in E$ (disuguaglianza triangolare)

La coppia (E, d) dove d è una distanza su E si dice *spazio metrico.*

Definizione 4.2 (Palla)**.** Dati (E, d) uno spazio metrico, $r > 0$, $x \in E$, definiamo $B_r(x) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}$ la *palla aperta di centro x e raggio r*, $\overline{B}_r(x) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}$ la *palla chiusa di centro x e raggio r.*

Definizione 4.3 (Intorno)**.** Dati (E, d) uno spazio metrico e $A \subseteq E$ un suo sottoinsieme, A si dice intorno di $x \in A$ se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$.

Definizione 4.4 (Aperto)**.** Dato E uno spazio metrico, $A \subseteq E$ si dice insieme aperto se A è intorno di ogni suo punto, cioè se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$.

Osservazione 4.5. Se $r > 0$ allora $B_r(x)$ è un insieme aperto per ogni $x \in E$.

Dimostrazione.
Per ogni $y \in B_r(x)$ si ha $d(x, y) < r$. Fissato $y \in B_r(x)$ e posta $d(x, y) = r - \delta$ con $0 < \delta < r$, per ogni $z \in B_\delta(y)$ si ha che $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$ per disuguaglianza triangolare. Pertanto si ha $B_\delta(y) \subseteq B_r(x)$, cioè $B_r(x)$ è un insieme aperto.

□

Definizione 4.6 (Topologia)**.** Dato E uno spazio metrico, si dice topologia di E l'insieme $\mathcal{A} = \{A \subseteq E \mid A \text{ è aperto}\}$.

Osservazione 4.7. Osserviamo che grazie alla costruzione delle palle aperte possiamo utilizzare una metrica per indurre una topologia.

Proposizione 4.8 (Proprietà degli aperti)**.** *Dato E uno spazio metrico e $\mathcal{A}$ la sua topologia, si ha che:*

1. $\emptyset, E \in \mathcal{A}$
2. $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$
3. $\{A_i\}_{i=1,\dots,n} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Dimostrazione.

1. $\emptyset$ non ha elementi, pertanto non c'è niente da verificare. E contiene ogni suo elemento, quindi ogni palla centrata in un suo elemento, pertanto E è aperto.

2. Per ogni $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ esiste $i \in I$ tale che $x \in A_i$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, pertanto è aperto.

3. Per ogni $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ si ha $x \in A_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Poiché $A_i \in \mathcal{A}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ esiste $r_i > 0$ tale che $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sia $r = min\{r_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$, $B_r(x) \subseteq A_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, allora $B_r(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ e quindi è aperto.

□

Definizione 4.9 (Chiuso)**.** Dato E uno spazio metrico, $A \subseteq E$ si dice insieme chiuso se $E \setminus A$ è un insieme aperto

Osservazione 4.10. Analogamente, se $r > 0$ allora $\overline{B}_r(x)$ è un insieme chiuso per ogni $x \in E$.

Proposizione 4.11 (Proprietà dei chiusi)**.** *Dato E uno spazio metrico, sia $\mathcal{C} = \{A \subseteq E \mid A$ è chiuso$\}$. Si ha:*

1. $\emptyset, E \in \mathcal{C}$
2. $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C} \implies \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{C}$
3. $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n} \subseteq \mathcal{C} \implies \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$

Dimostrazione.
Utilizzando le leggi di De Morgan la dimostrazione è analoga alla precedente.

□

Definizione 4.12 (Spazio normato)**.** Dato E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, E si dice *spazio normato* se esiste una funzione $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, detta *norma*, tale che:

- $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in E$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in E$

Osservazione 4.13. Uno spazio normato è anche uno spazio metrico se si considera una metrica indotta dalla norma, cioè $d(x, y) = \|x - y\| \ \forall x, y \in E$.

4.2 Parte interna, frontiera e aderenza

Definizione 4.14 (Punto interno/esterno)**.** Dato E uno spazio metrico, $x \in E$ si dice *interno* ad $A \subseteq E$ se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$. Analogamente $x \in E$ si dice esterno ad $A \subseteq E$ se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq E \setminus A$.

Definizione 4.15 (Parte interna)**.** Dato E uno spazio metrico, $A \subseteq E$, si dice *parte interna di A* l'insieme $\mathrm{int}(A) = \mathring{A} = \{x \in E \mid x$ è interno ad $A\}$.

Definizione 4.16 (Frontiera)**.** Dato E uno spazio metrico, $A \subseteq E$, si dice *frontiera di A* l'insieme $\partial A = \{x \in E \mid x \notin \mathrm{int}(A) \wedge x \notin \mathrm{int}(E \setminus A)\}$. Equivalentemente
$\partial A = \{x \in E \mid \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap A^C \neq \emptyset\}$.

Proposizione 4.17. *Dato E uno spazio metrico, $A \subseteq E$, si ha:*

1. *A è aperto se e solo se* $\text{int}(A) = A$
2. $\text{int}(A)$ *è un insieme aperto*
3. $\text{int}(A)$ *è il più grande insieme aperto contenuto in A*

Dimostrazione.

1. Segue dalla definizione di insieme aperto
2. Per definizione di parte interna si ha che per ogni $x \in \text{int}(A)$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$. Poiché $B_r(x)$ è un insieme aperto, per ogni $y \in B_r(x)$ esiste $r_1 > 0$ tale che $B_{r_1}(y) \subseteq B_r(x) \subseteq A$, cioè $y \in \text{int}(A)$. In particolare $B_r(x) \subseteq \text{int}(A)$, pertanto $\text{int}(A)$ è un insieme aperto.
3. Sia $A' \subseteq A$ un insieme aperto, allora per ogn $a \in A'$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(a) \subseteq A' \subseteq A$. Pertanto se $a \in \text{int}(A)$ allora $A' \subseteq \text{int}(A)$.

□

Osservazione 4.18. $\partial B_r(x) = \{y \in E \mid d(x, y) = r\}$.

Definizione 4.19 (Aderenza)**.** Dato E uno spazio metrico, $x \in E$ si dice *aderente* ad $A \subseteq E$ se per ogni $r > 0$ $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Chiamiamo $\overline{A} = \{x \in E \mid x$ è aderente ad $A\}$ la *chiusura* di A.

Osservazione 4.20. $\overline{A}$ è un insieme chiuso.

Proposizione 4.21. $\overline{A} = \text{int}(A) \sqcup \partial A$.

Dimostrazione.
$x \in \overline{A}$ se e solo se per ogni $r > 0$ si ha $B_r \cap A \neq \emptyset$, se e solo se $x \notin \text{int}(E \setminus A)$, se e solo se $x \in (\text{int}(E \setminus A))^C = \text{int}(A) \sqcup \partial A$.

□

Osservazione 4.22.

- $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}$ dove poniamo $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$
- Se A è chiuso allora $\overline{A} = A$
- $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso contenente A

4.3 Punti di accumulazione

Definizione 4.23 (Punto di accumulazione)**.** Dato E uno spazio metrico, $x \in E$ si dice *punto di accumulazione* per $A \subseteq E$ se per ogni $r > 0$ $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definizione 4.24 (Insieme derivato)**.** Dato E uno spazio metrico, si dice *insieme derivato* di $A \subseteq E$ l'insieme $A' = \{x \in E \mid x$ è un punto di accumulazione per A$\} = \mathcal{D}(A)$.

Definizione 4.25 (Punto isolato)**.** Dati E uno spazio metrico e $A \subseteq E$ un suo sottoinsieme, $a \in A$ si dice *punto isolato* se $a \notin A'$. A si dice *insieme discreto* se tutti i suoi punti sono isolati, cioè $\mathcal{D}(A) = \emptyset$.

Proposizione 4.26. *Dato E uno spazio metrico, $C \subset E$ è un insieme chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Sia x_0 un punto di accumulazione per C, supponiamo per assurdo $x_0 \notin C$, allora per ogni $r > 0$ $B_r(x_0) \cap C \neq \emptyset$. D'altra parte $x_0 \in C^C$ aperto, pertanto esiste $r' > 0$ tale che $B_{r'}(x_0)$ è tutta contenuta in C^C, in particolare $B_{r'}(x_0) \cap C = \emptyset$, che è assurdo in quanto x_0 è un punto di accumulazione per C.

($\Longleftarrow$). Per ogni $x \in C^C$, poiché x non è un punto di accumulazione per C, esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq C^C$, pertanto C^C è aperto, cioè C è chiuso

□

Osservazione 4.27. Dato A un insieme, tutti i suoi punti di accumulazione sono aderenti ad A.

Definizione 4.28 (Insieme denso)**.** Dato E uno spazio metrico, $A \subseteq E$ si dice *denso* in E se $\overline{A} = E$.

Osservazione 4.29. Se x è un punto di accumulazione per A allora per ogni $r > 0$ $B_r(x)$ contiene infiniti elementi di A diversi da x.

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che esista $r_0 > 0$ tale che $B_{r_0}(x)$ contiene un numero finito di punti diversi da x, consideriamo $r_1 < r_0$ tale che $B_{r_1}(x)$ non contiene nessun elemento di A diverso da x. Ciò significa che x non è un punto di accumulazione per A, che è assurdo.

□

Definizione 4.30 (Insieme limitato)**.** $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato se esistono $x \in E$, $r > 0$ tali che $E \subseteq B_r(x)$.

Proposizione 4.31. *Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, sia $\sigma = \sup A$. Se $\sigma < +\infty$ (cioè A è superiormente limitato) e $\sigma \notin A \implies \sigma \in \mathcal{D}(A)$.*

Dimostrazione.
Per la definizione di estremo superiore si ha:

$$\sigma = \sup A \iff \begin{cases} \sigma \geq a \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_0 \in A \mid \sigma - \varepsilon < a_0 \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ tale che $\sigma - \varepsilon < a \leq \sigma$. Dal momento che $\sigma \notin A$ si ha $\sigma - \varepsilon < a < \sigma$. Allora $\forall \varepsilon > 0 \ A \cap (B_\varepsilon(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \neq \emptyset$, pertanto σ è un punto di accumulazione di A, cioè $\sigma \in \mathcal{D}(A)$.

□

Osservazione 4.32. Vale un analogo enunciato (e dimostrazione) per inf A.

Proposizione 4.33. *Dato $G \subseteq \mathbb{R}$ un sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$, poniamo $g_0 \doteqdot \inf\{G \cap (0, +\infty)\}$, si ha:*

1. *se $g_0 = 0$ allora $\overline{G} = \mathbb{R}$, cioè G è denso in $\mathbb{R}$*
2. *se $g_0 > 0$ allora $G = g_0\mathbb{Z} \doteqdot \{g_0 k \mid k \in \mathbb{Z}\}$*

Dimostrazione.

1. Mostriamo che $\forall (a, b) \subset \mathbb{R}$ si ha $(a, b) \cap G \neq \emptyset$. Supponiamo $a > 0$, poiché g_0 è un punto di accumulazione per $G \cap (0, +\infty)$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g_\varepsilon \in G \cap (0, \varepsilon)$, in particolare fissiamo $\varepsilon, g_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tali che $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, $g_\varepsilon \in G \cap (0, \varepsilon)$. Poiché G è un gruppo additivo si ha $g_\varepsilon \mathbb{Z} \subseteq G$. Consideriamo adesso l'insieme $S = \{k \in \mathbb{N} \mid k g_\varepsilon < a\} \subset G, S \neq \emptyset$, poniamo $k_0 = \max S$. Abbiamo che $(k_0 + 1)g_\varepsilon > a$, da cui $(k_0 + 1)g_\varepsilon = k_0 g_\varepsilon + g_\varepsilon < k_0 g_\varepsilon + \varepsilon < a + \varepsilon < b$. Poiché $g_\varepsilon \in G$ e G è un gruppo additivo si ha $(k_0 + 1)g_\varepsilon \in G$, pertanto $(k_0 + 1)g_\varepsilon \in ((a, b) \cap G)$, cioè G è denso in $\mathbb{R}$.
2. Poiché $g_0 > 0$ e $g_0 = \inf(G \cap (0, +\infty))$ si ha che $g_0 \in G$. Infatti altrimenti si avrebbe $g_0 \in \mathcal{D}(G)$, pertanto $\exists g_1, g_2 \in G$ con $g_1 < g_2$ tali che $g_0 < g_1 < g_2 < 2g_0 \implies 0 < g_2 - g_1 < g_0$, assurdo per definizione di g_0. Dal momento che G è un gruppo additivo $g_0\mathbb{Z} \subseteq G$, supponiamo per assurdo che sia $g_0\mathbb{Z} \neq G$. Allora $\exists g_1 \in G \setminus g_0\mathbb{Z}$, cioè $\exists k_0 \in \mathbb{Z}$ tale che $k_0 g_0 < g_1 < (k_0 + 1)g_0$. Abbiamo quindi $g_1 - k_0 g_0 \in G \cap (0, \infty)$ e $g_1 - k_0 g_0 < g_0$, ma questo è assurdo per definizione di g_0, pertanto $G = g_0\mathbb{Z}$.

□

Corollario 4.34. *$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.*

Teorema 4.35 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e con cardinalità infinita, allora E ammette un punto di accumulazione, cioè $\mathcal{D}(E) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione.
Poiché E è limitato $\exists \mathcal{Q}_0 \supseteq E$ un n-cubo di spigolo $L_0 > 0$. Dividiamo $\mathcal{Q}_0$ in $\{\mathcal{Q}_0^{(1)}, \dots, \mathcal{Q}_0^{(2^n)}\}$, 2^n n-cubi di spigolo $\frac{L_0}{2}$. Almeno uno di questi n-cubi contiene infiniti punti di E, infatti se per assurdo $\forall i \in \{1, \dots, 2^n\}$, $|\mathcal{Q}_0^{(i)} \cap E|$ fosse finita allora si avrebbe $|E| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} |\mathcal{Q}_0^{(i)}|$, ma questo è assurdo in quanto E ha cardinalità infinita. Poniamo quindi tale n-cubo $\mathcal{Q}_1$ e reiteriamo questo ragionamento. $\forall j \geq 0$ sia $\mathcal{Q}_{j+1}$ tale n-cubo, osserviamo che $\mathcal{Q}_j$ ha spigolo di $\frac{L_0}{2^j}$, poniamo $\overline{x} \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{Q}_j}$. Poiché $\forall r > 0 \exists j \in \mathbb{N}$ tale che $r > \frac{L_0}{2^j}$, abbiamo che $\mathcal{Q}_j \subseteq B_r(\overline{x})$ e $|E \cap \mathcal{Q}_j| = +\infty$, pertanto $\forall r > 0$ $\exists a \in E \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $a \in B_r(\overline{x})$, cioè $\overline{x}$ è un punto di accumulazione per E.

$\square$

Osservazione 4.36. Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso allora tale punto di accumulazione è contenuto in E.

Capitolo 5

Limiti

5.1 Limiti di funzioni e successioni

Definizione 5.1 (Limite di funzione)**.** Dati E, F spazi metrici, $f : E \setminus \{x_0\} \to F$ una funzione, $x_0 \in E$ punto di accumulazione per E, si dice che f ha limite $\ell \in F$ per $x \to x_0$ (x che tende a x_0) se $\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$. Indichiamo il limite con $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ oppure $f(x) \to \ell$ se è chiaro dal contesto a quale valore tende x.

Osservazione 5.2.

- Il limite è indipendente da $f(x_0)$.
- Se il limite esiste è unico, supponiamo infatti che ℓ e ℓ' siano due limiti distinti di $f(x)$ per $x \to x_0$, allora esistono V, V' intorni di ℓ, ℓ' rispettivamente tali che $V \cap V' = \emptyset$. Per la definizione di limite abbiamo che esistono U, U' intorni di x_0 tali che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$ e $f(U' \setminus \{x_0\}) \subseteq V'$. Allora $\exists r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subseteq U \cap U'$, pertanto $f(B_r(x_0)) \subseteq V \cap V'$, che è assurdo.

Definizione 5.3 (Reali estesi)**.** Definiamo l'*insieme dei reali esteso* l'insieme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, dove $+\infty$ e $-\infty$ sono due oggetti per i quali valgono le seguenti convenzioni:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
- $(+\infty)(+\infty) = +\infty$
- $(-\infty)(-\infty) = +\infty$
- $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$
- $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$
- $\forall x > 0 \in \mathbb{R}$, $x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$, $x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty$
- $\forall x < 0 \in \mathbb{R}$, $x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty$, $x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty$

Osservazione 5.4. L'insieme dei reali esteso può essere utile per descrivere meglio le proprietà di alcuni limiti, tuttavia non possiede la struttura di campo e non rispetta l'Assioma di Dedekind (non esiste un elemento separatore tra x e $\pm\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$). $\overline{\mathbb{R}}$ non è nemmeno uno spazio metrico, ma è uno spazio topologico con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Definizione 5.5 (Intorno di infinito)**.** Diciamo che U è un intorno di $+\infty$ se $\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $y \in U$ $\forall y > x$. Analogamente diciamo che U è un intorno di $-\infty$ se $\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $y \in U$ $\forall y < x$.

Osservazione 5.6. Adesso possiamo definire i limiti per $x \to \pm\infty$ e possono valere $\pm\infty$.

Definizione 5.7 (Successione)**.** a_n si dice una *successione a valori in* E se esiste una funzione $f : \underset{n \longmapsto a_n}{\mathbb{N} \to E}$.

Definizione 5.8 (Limite di successione)**.** Dato E uno spazio metrico, a_n una successione a valori in E, essa ha limite $\ell \in E$ se, definita $f : \underset{n \longmapsto a_n}{\mathbb{N} \to E}$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell,$$

cioè se $\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di $+\infty$ tale che $f(n) \in V$ $\forall n \in \mathbb{N} \cap U$. Equivalentemente se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in V$ $\forall n > n_0$.

Osservazione 5.9. Poiché $\mathbb{N} \subset \overline{\mathbb{R}}$ è ben definito il limite per $n \to +\infty$.

Definizione 5.10 (Convergenza)**.** Una successione a_n a valori in $\mathbb{R}$ si dice *convergente* se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, si dice *divergente* se $a_n \to \pm\infty$, si dice *non convergente* se non è definito il limite per $n \to +\infty$.

Proposizione 5.11. *Dato E uno spazio metrico, $C \subset E$ è chiuso se e solo se tutte le successioni a valori in C convergenti in E, convergono in C.*

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Sia a_n una successione a valori in C, $x \in E$ tale che $a_n \to x$.
Poiché $\forall r > 0$ $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap C \neq \emptyset$ si ha che x è un punto di accumulazione per C. C è un insieme chiuso, pertanto contiene i suoi punti di accumulazione, cioè $x \in C$.

($\Longleftarrow$). Sia a_n una successione a valori in C convergente in $x \in E$, per definizione di limite si ha che per ogni $r > 0$ l'insieme $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap C$ è non vuoto, pertanto x è un punto di accumulazione per C. Per ipotesi si ha che a_n converge in C, cioè $x \in C$. Per l'arbitrarietà di a_n allora C contiene tutti i suoi punti di accumulazione, pertanto è chiuso.

□

Teorema 5.12 (Dei due carabinieri)**.** *Dato E uno spazio metrico, f, g, h funzioni da $E \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione per E, se $f \leq h \leq g$ in un intorno di x_0 e*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell.$$

Dimostrazione.
Distinguiamo due casi:

($\ell = \pm\infty$). Supponiamo $\ell = +\infty$ (il caso $\ell = -\infty$ si tratta in modo analogo), allora $\forall V$ intorno di $+\infty$, $V = (a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$, $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in V$ $\forall x \in U$, cioè $f(x) > a$ $\forall x \in U$. Allora $h(x) \geq f(x) > a$ $\forall x \in U$, pertanto $\lim_{x \to x_0} h(x) = +\infty = \ell$.

($\ell \in \mathbb{R}$). Per definizione di limite $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e $g(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ $\forall x \in U$. Pertanto $h(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, cioè $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

□

Corollario 5.13. *Dato E uno spazio metrico, f funzione da $E \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione per E,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0.$$

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Per la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ intorno di x_0 tale che
$f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\forall x \in U$. Allora $|f(x)| \in [0, \varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \forall x \in U$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

($\Longleftarrow$). Per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$ si ha $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, pertanto per il Teorema dei due carabinieri si ha la tesi.

□

Corollario 5.14. *Dato E uno spazio metrico, f, g funzioni da $E \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione per E,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ e } |g(x)| \leq M \in \mathbb{R} \text{ in un intorno di } x_0 \implies \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Dimostrazione.
In un intorno di x_0 si ha

$$-M|f(x)| \leq f(x) \cdot g(x) \leq M|f(x)|,$$

poiché per $x \to x_0$ si ha $f(x) \to 0$ e M è una costante, per il Teorema dei due carabinieri si ha

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

□

5.2 Proprietà algebriche dei limiti in $\overline{\mathbb{R}}$

Teorema 5.15 (Permanenza del segno)**.** *Dati E, F spazi metrici, f funzione da $E \setminus \{x_0\}$ in F, $x_0 \in E$ punto di accumulazione per E, se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \gtreqless 0 \text{ allora esiste } U \text{ un intorno di } x_0 \text{ tale che } f(y) \gtreqless 0 \ \forall y \in U.$$

Proposizione 5.16 (Somma)**.** *Dato E uno spazio metrico, f, g funzioni da $E \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R}$ con x_0 punto di accumulazione per E,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R} \implies \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m.$$

Dimostrazione.
Per la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_1$, U_2 intorni di x_0 tali che
$f(U_1 \setminus \{x_0\}) \subset B_{\varepsilon/2}(\ell)$ e $g(U_2 \setminus \{x_0\}) \subset B_{\varepsilon/2}(m)$. Poniamo $U = U_1 \cup U_2$, chiaramente U è un intorno di x_0. Allora $\forall x \in U \setminus \{x_0\} \ \exists r_1$, r_2, con
$|r_1|$, $|r_2| < \varepsilon/2$, tali che $f(x) = \ell + r_1$ e $g(x) = m + r_2$, pertanto
$f(x) + g(x) = \ell + r_1 + m + r_2$. Quindi abbiamo $f(x) + g(x) \in B_\varepsilon(\ell + m) \ \forall x \in U \setminus \{x_0\}$, pertanto

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m.$$

□

Proposizione 5.17 (Prodotto)**.** *Dato E uno spazio metrico, f, g funzioni da $E \setminus \{x_0\}$ con x_0 punto di accumulazione per E,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R} \implies \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell \cdot m.$$

Dimostrazione.
Per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$0 \leq |f(x)g(x) - \ell m| \leq |f(x)g(x) - \ell g(x)| + |\ell g(x) - \ell m|,$$

da cui si ricava

$$0 \leq |f(x)g(x) - \ell m| \leq |g(x)| \cdot |f(x) - \ell| + |\ell| \cdot |g(x) - m|.$$

Per $x \to x_0$ si ha $|f(x) - \ell| \to 0$ e $|g(x) - m| \to 0$, pertanto per il Teorema dei due carabinieri

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)g(x) - \ell m| = 0, \text{ cioè } \lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \ell m.$$

□

Proposizione 5.18. *Dati E uno spazio metrico, x_0 un punto di accumulazione per E, f, g funzioni da $E \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R}$, se esiste I un intorno di x_0 tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ e se esistono finiti $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ allora $\ell \leq m$.*

Dimostrazione.
Consideriamo la funzione $h : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tale che $h(x) = g(x) - f(x)$ per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, osserviamo che $h(x) \geq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, inoltre $\lim_{x\to x_0} h(x) = m - \ell$. Supponiamo per assurdo $m - \ell < 0$, per il Teorema di permanenza del segno si ha che esiste un intorno $U \subseteq I$ di x_0 tale che $h(x) < 0$ per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$, cioè $g(x) - f(x) < 0$ per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$, che è assurdo. Pertanto $\ell \leq m$.

□

5.3 Insiemi compatti

Definizione 5.19 (Compattezza)**.** Dato E uno spazio topologico, $\mathcal{A}$ la sua topologia:

1. E si dice *compatto* se per ogni ricoprimento aperto di E esiste un sottoricoprimento finito che contiene E, cioè se $\forall R \subset \mathcal{A}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{\Omega \in R} \Omega$, $\exists S \subseteq R$ finito tale che $E \subseteq \bigcup_{\Omega' \in S} \Omega'$.
2. E si dice *numerabilmente compatto* se la proprietà precedente è valida per ogni ricoprimento numerabile.
3. E si dice *sequenzialmente compatto* se $\forall x_n$ successione a valori in E esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in E.

Teorema 5.20. *Dato E uno spazio metrico, i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *E è compatto*
2. *E è numerabilmente compatto*
3. *E è sequenzialmente compatto*

Osservazione 5.21. Questa è una proprietà specifica degli spazi metrici, non vale in generale per uno spazio topologico.

Proposizione 5.22. *Dato E uno spazio metrico compatto, se $F \subseteq E$ è un insieme chiuso allora F è uno spazio metrico compatto.*

Dimostrazione.
Sia x_n una successione a valori in F, in particolare x_n ha valori in E. Poiché E è uno spazio metrico compatto esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in $x \in E$. Osserviamo che x è un punto di accumulazione per F e, poiché chiuso, F contiene tutti i suoi punti di accumulazione, pertanto $x \in F$, cioè F è compatto.

□

Proposizione 5.23. *Dato E uno spazio metrico, se $F \subseteq E$ è un insieme compatto allora F è chiuso e limitato*

Dimostrazione.
Dimostriamo separatamente che F è chiuso e limitato.

1. Supponiamo per assurdo che F non sia chiuso, allora esiste $x_0 \notin F$ punto di accumulazione per F, quindi esiste una successione x_n a valori in F convergente in x_0. Poiché F è compatto esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in $x_1 \in F$. D'altra parte, per unicità del limite si deve avere $x_0 = x_1$, che è assurdo. Pertanto F è chiuso.
2. Supponiamo per assurdo che F non sia limitato, allora $\forall x \in F$ si ha $F \nsubseteq B_r(x)$ $\forall r > 0$. Consideriamo una successione x_n tale che
$x_n \in F \setminus B_{d(x_0, x_{n-1})+1}(x_0)$, allora $d(x_n, x_m) \geq 1$ $\forall n \neq m$, e questo è valido anche per ogni sottosuccessione x_{n_k}. Quindi né x_n, né le sue sottosuccessioni convergono, cioè F non è compatto, che è assurdo. Pertanto F è limitato.

□

Osservazione 5.24. Il viceversa non è vero, in generale esistono spazi metrici con sottoinsiemi chiusi, limitati, non compatti. Consideriamo ad esempio l'insieme $\ell_\infty = \{a_n \text{ successioni limitate a valori in } \mathbb{R}\}$, definiamo una norma $\|\cdot\|$ su ℓ_∞ tale che $\|x_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ per ogni $x_n \in \ell_\infty$. Con la distanza d indotta dalla norma (ℓ_∞, d) è uno spazio metrico. Osserviamo che le palle chiuse $\overline{B}_R(x_n) = \{y_n \mid \|x_n - y_n\| \leq R\}$ sono insiemi chiusi, limitati e non compatti. Infatti se consideriamo la successione $x_n \in \overline{B}_1(0)$ (0 indica la successione identicamente nulla) dove per ogni $m \in \mathbb{N}$ x_m è la successione a_i tale che $a_i = 0$ se $i \neq m$ e $a_m = 1$, non è possibile estrarre una sottosuccessione x_{n_k} convergente in $\overline{B}_1(0)$, pertanto $\overline{B}_1(0)$ non è compatto, così come tutte le palle chiuse di ℓ_∞.

Teorema 5.25. *Dato $F \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, allora F è compatto.*

Dimostrazione.
Sia x_n una successione a valori in F, distinguiamo due casi:

1. Se esiste un valore $x \in F$ tale che $x_n = x$ frequentemente, cioè $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists n' > n$ tale che $x_{n'} = x$, allora esiste una sottosuccessione x_{n_k} costante tale che $x_{n_k} = x\ \forall k \in \mathbb{N}$ che converge banalmente a $x \in F$, quindi F è compatto.
2. Altrimenti abbiamo che l'insieme $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq F$ è infinito e limitato, pertanto F è infinito ed esiste un punto di accumulazione $x \in \mathbb{R}^n$ per l'insieme X per il Teorema di Bolzano-Weierstrass. F è chiuso, pertanto contiene tutti i suoi punti di accumulazione, possiamo quindi costruire una successione a valori in X, cioè una sottosuccessione di x_n, convergente in x, quindi F è compatto.

□

Diamo adesso una dimostrazione alternativa del Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Teorema 5.26 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Dato E uno spazio metrico, se $F \subseteq E$ è infinito e compatto allora F ammette un punto di accumulazione.*

Dimostrazione.
Sia x_n una successione a valori in F tale che $x_n \notin \{x_1, \dots, x_{n-1}\}\ \forall n \in \mathbb{N}$, allora per la compattezza di F esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente a un punto $x \in F$ con $x_{n_k} \neq x\ \forall k \in \mathbb{N}$, in particolare x è un punto di accumulazione per F.

□

5.4 Successioni di Cauchy, completezza

Definizione 5.27 (Successione di Cauchy)**.** Dato E uno spazio metrico, una successione x_n a valori in E si dice *successione di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon > 0 \text{ tale che } d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall n, m > n_\varepsilon.$$

Proposizione 5.28. *Dato E uno spazio metrico, se x_n è una successione a valori in E convergente in $x \in E$ allora x_n è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione.
Poiché x_n converge in x si ha che $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ tale che $x_n \in B_{\varepsilon/2}(x)$, cioè $d(x_n, x) < \varepsilon/2$, $\forall n > n_\varepsilon$. Per disuguaglianza triangolare si ha

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon\ \forall n, m > n_\varepsilon,$$

pertanto x_n è una successione di Cauchy.

□

Osservazione 5.29. Non è vero il viceversa, infatti una successione di Cauchy è sempre limitata, ma potrebbe non convergere in E.

Proposizione 5.30. *Data x_n una successione a valori in $\mathbb{R}^n$, se x_n è una successione di Cauchy allora converge in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione.
Poiché x_n è una successione di Cauchy si ha che l'insieme $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato. Distinguiamo due casi:

1. Se X è un insieme finito allora x_n assume frequentemente lo stesso valore x_i. Poiché x_n è una successione di Cauchy si ha che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon > 0 \text{ tale che } d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall n, m > n_\varepsilon,$$

   in particolare per la disuguaglianza triangolare si ha che
   $d(x_n, x_m) < d(x_n, x_i) + d(x_m, x_i)$. Poiché $d(x_n, x_i)$, $d(x_m, x_i) < \varepsilon$ si ha che $x_n \to x_i$.

2. Se X è un insieme infinito allora per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste un punto di accumulazione $x \in \mathbb{R}^n$, pertanto esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in x. Allora abbiamo che x_n converge in x, infatti

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon, k_\varepsilon \text{ tali che } d(x_n, x_m) < \varepsilon, \; d(x_{n_k}, x) < \varepsilon \; \forall n, m > n_\varepsilon, \forall k > k_\varepsilon.$$

Pertanto per disuguaglianza triangolare si ha

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\varepsilon,$$

cioè $x_n \to x$.

□

Definizione 5.31 (Spazio metrico completo)**.** Uno spazio metrico E si dice *completo* se tutte le successioni di Cauchy a valori in E convergono in E.

Osservazione 5.32.

- $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo, $\mathbb{Q}$ no
- Uno spazio metrico compatto è anche completo
- Esistono campi ordinati e completi come spazi metrici diversi da $\mathbb{R}$ (e non isomorfi), ma $\mathbb{R}$ è l'unico a essere anche archimedeo
- È possibile dare una costruzione di $\mathbb{R}$ tramite la relazione di equivalenza indotta dalle successioni di Cauchy: date x_n, y_n successioni a valori in $\mathbb{Q}$ poniamo $x_n \sim y_n \iff (x_n - y_n) \to 0$ per $n \to \infty$ e identifichiamo $\mathbb{R}$ con il quoziente $\{x_n \in \mathbb{Q} \text{ successione di Cauchy}\}/_\sim$

Definizione 5.33 (Spazio di Banach)**.** Uno spazio normato E si dice *spazio di Banach* se è uno spazio metrico completo con la metrica indotta dalla norma.

Teorema 5.34 (Baire)**.** *Dati E uno spazio metrico, $\{F_n \subseteq E\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di chiusi a parte interna vuota e $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, allora F è a parte interna vuota.*

5.5 Limite destro e sinistro

Definizione 5.35 (Limite destro e sinistro)**.** Dati E uno spazio metrico, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione, definiamo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)|_{(E \cap (x_0, +\infty))}$$

il *limite destro di $f(x)$ per $x \to x_0$*. Analogamente definiamo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)|_{(E \cap (-\infty, x_0))}$$

il *limite sinistro di $f(x)$ per $x \to x_0$*.

Osservazione 5.36.

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall V$ intorno di ℓ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) \in V \; \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$
- Se esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$ allora esistono anche i limiti destro e sinistro rispetto a x_0, ma non vale il viceversa. Ad esempio la funzione

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

non ammette limite in 0, anche se esistono finiti i limiti destro e sinistro rispetto a 0

Proposizione 5.37. *Dati E uno spazio metrico, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, $f : E \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione, se esistono finiti*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \text{ allora } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Dimostrazione.
Per la definizione di limite destro e sinistro abbiamo che per ogni V intorno di ℓ esistono ε^-, $\varepsilon^+ > 0$ tali che $f(x) \in V \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon^-, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon^+)$. Posto $\varepsilon = \min\{\varepsilon^-, \varepsilon^+\}$ si ha $f(x) \in V \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

□

Proposizione 5.38. *Dati $E \subset \mathbb{R}$ uno spazio metrico, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora esistono finiti*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+ \text{ e } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^-$$

e rispettano la monotonia di f.

Dimostrazione.
Consideriamo l'insieme $E \cap (-\infty, x_0)$, poiché x_0 è un punto di accumulazione per E si ha che $x_0 = \sup(E \cap (-\infty, x_0))$. Se f è crescente allora esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x)|_{(E \cap (-\infty, x_0))} = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (E \cap (-\infty, x_0))} f(x).$$

Se f è decrescente allora esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x)|_{(E \cap (-\infty, x_0))} = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x \in (E \cap (-\infty, x_0))} f(x).$$

Per il limite destro la dimostrazione è analoga. □

5.6 Limite superiore e limite inferiore

Definizione 5.39 (Limite superiore e inferiore (1))**.** Dati E uno spazio metrico, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si dice *limite superiore di f per $x \to x_0$* se:

- $\ell = -\infty \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
- $\ell = +\infty \implies \exists x_n$ successione a valori in E convergente in $x_0 \in E$ tale che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$
- $\ell \in \mathbb{R} \implies \exists x_n$ successione a valori in E convergente in $x_0 \in E$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x_n) = \ell$

Analogamente $\liminf_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si dice *limite inferiore di f per $x \to x_0$* se:

- $\ell = +\infty \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- $\ell = -\infty \implies \exists x_n$ successione a valori in E convergente in $x_0 \in E$ tale che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$
- $\ell \in \mathbb{R} \implies \exists x_n$ successione a valori in E convergente in $x_0 \in E$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x_n) = \ell$

Definizione 5.40 (Limite superiore e inferiore (2))**.** Dati E uno spazio metrico, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, definiamo $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_U \{\sup f(x) \mid x \in U \setminus \{x_0\}\}$, con U un intorno di x_0, il *limite superiore di f per $x \to x_0$*. Analogamente definiamo $\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_U \{\inf f(x) \mid x \in U \setminus \{x_0\}\}$, con U un intorno di x_0, il *limite inferiore di f per $x \to x_0$*.

Osservazione 5.41.

- $\limsup_{x \to x_0} f(x) \geq \liminf_{x \to x_0} f(x)$
- f ammette limite in x_0 se e solo se $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f(x)$
- $\limsup_{x \to x_0} (f+g)(x) \leq \limsup_{x \to x_0} f(x) + \limsup_{x \to x_0} g(x)$
- $\liminf_{x \to x_0} (f+g)(x) \geq \liminf_{x \to x_0} f(x) + \liminf_{x \to x_0} g(x)$
- $\limsup_{x \to x_0} (-f(x)) = -\liminf_{x \to x_0} f(x)$
- A differenza del limite, i limiti superiore e inferiore esistono sempre per ogni punto del dominio

Definizione 5.42 (Oscillazione)**.** Dati E uno spazio metrico, $x_0 \in E$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, si definisce *oscillazione di f rispetto a x_0* la funzione

$$osc(f)(x_0) = \begin{cases} 0 & x_0 \text{ punto isolato} \\ \limsup_{x \to x_0} f(x) - \liminf_{x \to x_0} f(x) & x_0 \text{ punto di accumulazione per } E \end{cases}$$

Proposizione 5.43. *Dati E uno spazio metrico, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, f, g funzioni da E in $\mathbb{R}$, se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R},\ \limsup_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R} \text{ allora } \limsup_{x \to x_0} (f+g)(x) = \limsup_{x \to x_0} g(x) + \ell.$$

Dimostrazione.
Dalla definizione del limite superiore si ha che esiste una successione x_n a valori in E convergente in $x_0 \in E$ tale che $\lim_{x \to x_0} g(x_n) = m$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste U intorno di x_0 tale che $g(x_n) < m + \varepsilon/2$ $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$. Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si ha che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$, pertanto $\lim_{n \to +\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \ell + m$. Per la definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ esiste V intorno di x_0 tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon/2$ $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$, in particolare $f(x) < \ell + \varepsilon/2$ $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$. Pertanto per $x \in U \cap V$ vale $f(x) + g(x) < \ell + m + \varepsilon$ cioè $\limsup_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m$.

□

Proposizione 5.44. *Dati E uno spazio metrico, x_0 punto di accumulazione per E, $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tale che $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se φ è continua in ℓ e strettamente crescente allora vale*

$$\limsup_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \varphi(\ell).$$

Dimostrazione.
Poiché $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell$ esiste una successione x_n a valori in E tale che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$, da cui $\lim_{n \to +\infty} \varphi(f(x_n)) = \varphi(\ell)$ per continuità di φ. Mostriamo adesso che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste U intorno di x_0 tale che $\varphi(f(x)) < \varphi(\ell) + \varepsilon$ per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$. Fissato $\varepsilon > 0$, per continuità di φ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y \in B_\delta(\ell)$ si ha $\varphi(y) \in B_\varepsilon(\varphi(\ell))$, in particolare si ha $\varphi(y) < \varphi(\ell) + \varepsilon$. Per definizione di limite superiore, in corrispondenza di tale δ esiste U intorno di x_0 tale che $f(x) < \ell + \delta$ per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$, pertanto $\varphi(f(x)) < \varphi(\ell + \delta) < \varphi(\ell) + \varepsilon$, per la monotonia di φ, per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$. Quindi $\limsup_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \varphi(\ell)$.

□

Proposizione 5.45. *Data a_n una successione a termini positivi,* $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Dimostrazione.
Mostriamo che $\limsup_{n \to +\infty} \dfrac{\log a_n}{n} \leq \limsup_{n \to +\infty} \log\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, per la proposizione precedente questo è equivalente alla tesi ($\varphi = \log$). Consideriamo il caso in cui $\limsup_{n \to +\infty} \log\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \sigma \in \mathbb{R}$, gli altri si trattano in modo

analogo. Per definizione, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < \sigma + \varepsilon$ per ogni $n > n_0$. Fissato $n > n_0$ possiamo scrivere

$$\log a_n = \log a_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \log a_{k+1} - \log a_k = \log a_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \log\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right).$$

Abbiamo quindi

$$\frac{\log a_n}{n} < \frac{\log a_{n_0}}{n} + \frac{n-n_0}{n}(\sigma+\varepsilon) = \frac{\log a_{n_0}}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)(\sigma+\varepsilon).$$

Passando ai limiti superiori si ha

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log a_n}{n} \leq \sigma + \varepsilon,$$

per arbitrarietà di ε quindi $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log a_n}{n} \leq \sigma$, da cui segue la tesi.

$\square$

Capitolo 6

Funzioni continue

6.1 Definizione e proprietà

Definizione 6.1 (Funzione continua)**.** Dati E, F spazi metrici, x_0 un punto di accumulazione per E, una funzione f da E in F si dice *continua in* x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f si dice *continua su* E se è continua in ogni punto di E.

Osservazione 6.2. Dalla definizione di limite si ha che f è continua in $x_0 \in E$ se e solo se $\forall V$ intorno di $f(x_0)$ esiste U intorno di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$.

Dati E uno spazio metrico, f, g funzioni da E in $\mathbb{R}$, $x_0 \in E$ punto di accumulazione per E, dalle proprietà algebriche dei limiti abbiamo le seguenti proprietà algebriche per le funzioni continue:

- $f + g$ è continua in x_0
- $f \cdot g$ è continua in x_0
- $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 (se $g(x_0) \neq 0$)
- $c \cdot f$ è continua in x_0 $\forall c \in \mathbb{R}$

Osservazione 6.3. L'insieme delle funzioni continue da E in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Teorema 6.4 (Permanenza del segno)**.** *Dati E uno spazio metrico, x_0 un suo punto di accumulazione, f da E in $\mathbb{R}$ funzione continua, se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \gtrless 0 \textit{ allora esiste } U \textit{ intorno di } x_0 \textit{ tale che } f(x) \gtrless 0 \ \forall x \in U.$$

Teorema 6.5 (Composizione)**.** *Dati E, F, G spazi metrici, f una funzione da $E \setminus \{x_0\}$ in F con x_0 punto di accumulazione per E, g una funzione da F in G, se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in F$$

e g è continua in y_0 allora

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0).$$

Dimostrazione.
Sia V un intorno di $g(y_0)$, poiché g è continua in y_0 esiste U intorno di y_0 tale che $g(U) \subseteq V$, inoltre per la definizione di limite esiste W intorno di x_0 tale che $f(W \setminus \{x_0\}) \subseteq U$. Quindi si ha $g(f(W \setminus \{x_0\})) \subseteq V$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0).$$

□

Proposizione 6.6. *Dati E, F spazi metrici, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, f da E in F una funzione, f è continua in x_0 se e solo se per ogni successione x_n convergente in x_0 si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Poiché f è continua per ogni V intorno di $f(x_0)$ esiste U intorno di x_0 tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$. Consideriamo $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, poiché x_n converge in x_0 abbiamo che x_0 è un punto di accumulazione per X, in particolare per ogni intorno U di x_0, $x_n \in U$ $\forall n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, cioè $f(x_n) \in V$ $\forall n > n_0$, pertanto
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

($\Longleftarrow$). Per ogni U intorno di x_0 esiste V intorno di $f(x_0)$ tale che $f(U\setminus\{x_0\}) \subseteq V$. D'altra parte $f(x_0) \in V$ in quanto x_0 è un punto del dominio di f, pertanto $f(U) \subseteq V$, cioè f è continua.

□

Osservazione 6.7. L'enunciato è valido per una funzione continua tra spazi metrici, ma in generale non per una funzione continua tra spazi topologici.

6.2 Teoremi principali sulle funzioni continue

D'ora in poi indicheremo con $[a, b]$ e (a, b) degli intervalli, chiusi o aperti rispettivamente, contenuti in $\mathbb{R}$.

Teorema 6.8 (Weierstrass)**.** *Dato E uno spazio metrico compatto, f da E in $\mathbb{R}$ una funzione continua, allora f ammette punti di massimo e minimo in E, cioè*

$$\exists x_m, x_M \in E \text{ tali che } f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\ \forall x \in E.$$

Dimostrazione.

- Mostriamo che esiste un punto di minimo per f.
  Siano $\ell = \inf\limits_{x\in E} f(x) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$, y_n una successione a valori in $f(E)$ convergente in ℓ, x_n una successione a valori in E tale che $y_n = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Per la compattezza di E si ha che esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in un punto $x_m \in E$. Poiché f è continua si ha che
  $$f(x_m) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = \ell,$$
  pertanto $x_m \in E$ è un punto di minimo per f.
- Mostriamo che esiste un punto di massimo per f.
  Siano $\ell = \sup\limits_{x\in E} f(x) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, y_n una successione a valori in $f(E)$ convergente in ℓ, x_n una successione a valori in E tale che $y_n = f(x_n)$
  $\forall n \in \mathbb{N}$. Per la compattezza di E si ha che esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in un punto $x_M \in E$. Poiché f è continua si ha che
  $$f(x_M) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = \ell,$$
  pertanto $x_M \in E$ è un punto di massimo per f.

□

Teorema 6.9 (Degli Zeri)**.** *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione continua, se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora esiste $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione.
Senza perdita di generalità supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Sia $X = \{x \in (a, b) \mid f(x) < 0\}$ poniamo $x_0 = \sup X$. Supponiamo per assurdo $f(x_0) < 0$, allora per il Teorema di permanenza del segno $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f(x) < 0$ con $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$, ma questo è assurdo per definizione di x_0, pertanto $f(x_0) \geq 0$. Supponiamo per assurdo $f(x_0) > 0$, allora per il Teorema di permanenza del segno $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f(x) > 0$ con $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0]$, ma questo è assurdo perché altrimenti x_0 non sarebbe il minimo maggiorante per l'insieme X. Pertanto $f(x_0) = 0$.

□

Corollario 6.10 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Data* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua, allora* $f([a,b]) = [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$.

Dimostrazione.
Sia $c \in [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$, $f-c$ è continua su $[a,b]$, pertanto per il Teorema degli zeri esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) - c = 0$, cioè $f(x_0) = c$, quindi $[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)] \subseteq f([a,b])$. L'altra inclusione è ovvia, pertanto si ha l'uguaglianza.

□

6.2.1 Insiemi connessi e insiemi compatti

Definizione 6.11 (Connessione)**.** Uno spazio metrico E si dice:

1. *sconnesso* se $\exists A,\, B \subseteq E$ aperti non vuoti tali che $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = E$
2. *connesso* se non è sconnesso, cioè se non esistono $A, B \subseteq E$ aperti non vuoti tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$
3. *connesso per archi* se $\forall x,\, y \in E\ \exists \gamma : [a,b] \to E$ funzione continua tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

Osservazione 6.12. Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è connesso se e solo se è connesso per archi se e solo se è un intervallo, una semiretta o tutto $\mathbb{R}$.

Definizione 6.13 (Insieme convesso)**.** Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice *convesso* se $\forall x,\, y \in E\ \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\} \subseteq E$.

Osservazione 6.14. Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ convesso è connesso per archi.

Teorema 6.15. *Dati E, F spazi metrici, $f : E \to F$ una funzione continua,*

1. *se E è connesso allora $f(E)$ è connesso*
2. *se E è connesso per archi allora $f(E)$ è connesso per archi*

Dimostrazione.

1. Supponiamo per assurdo che $f(E)$ sia sconnesso, cioè $\exists A, B \subseteq f(E)$ aperti non vuoti tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = f(E)$. Chiaramente abbiamo che $f(E) \cap A \neq \emptyset$ e $f(E) \cap B \neq \emptyset$, allora $E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ con $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ aperti non vuoti disgiunti, cioè E è sconnesso, che è assurdo. Pertanto $f(E)$ è connesso.
2. Siano $y_1, y_2 \in f(E)$, $x_1, x_2 \in E$ tali che $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Dato che E è connesso per archi esiste una funzione $\gamma : [0,1] \to E$ continua tale che $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$. Definiamo $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, $\tilde{\gamma}$ è continua perché composizione di funzioni continue. Allora $\tilde{\gamma} : [0,1] \to f(E)$ è tale che $\tilde{\gamma}(0) = y_1$, $\tilde{\gamma}(1) = y_2$. Poiché questo vale per ogni y_1, $y_2 \in f(E)$ si ha che $f(E)$ è connesso per archi.

□

Proposizione 6.16. *Dato E uno spazio metrico, se E è connesso per archi allora è connesso.*

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che E sia disconnesso, allora esistono A, $B \subseteq E$ aperti non vuoti tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$. Consideriamo due punti $x \in A$, $y \in B$, poiché E è connesso per archi esiste una funzione continua $\gamma : [0,1] \to E$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Allora abbiamo che $\gamma([0,1]) \subseteq E$, $\gamma([0,1]) \nsubseteq A$ e $\gamma([0,1]) \nsubseteq B$, quindi è sconnesso, ma questo è assurdo per la proposizione precedente in quanto $[0,1]$ è connesso e γ è continua. Pertanto E è connesso.

□

Proposizione 6.17. *Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ uno spazio metrico, se E è aperto e connesso allora E è connesso per archi.*

Dimostrazione.
Fissiamo $x \in E$, consideriamo l'insieme

$$A = \{y \in E \mid \exists \gamma : [0,1] \to E \text{ funzione continua con } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} \subseteq E.$$

Osserviamo che A è un aperto, infatti per ogni $y \in A$ esiste $r > 0$ tale che la palla $B_r(y)$ è contenuta in A in quanto per ogni $y' \in B_r(y)$ esiste una funzione continua $\gamma' : [0,1] \to E$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y'$ in quanto y' è un punto di accumulazione per $\mathbb{R}$. Inoltre abbiamo che $E \setminus A$ è aperto, infatti se fosse chiuso si avrebbe $\partial(E \setminus A) \subseteq E \setminus A$, cioè esisterebbero dei punti non appartenenti ad A i cui intorni intersecano quelli dei punti di A, che è assurdo. Pertanto $E = A \cup (E \setminus A)$, con A, $E \setminus A$ aperti disgiunti ed E connesso, ma allora si ha $E \setminus A = \emptyset$ e $A = E$, quindi E è connesso per archi per definizione di A.

□

Osservazione 6.18.

- La proposizione non vale per i chiusi, ad esempio

$$C = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\} \cup (\bigcup_{|y| \leq 1} (0,y))$$

  è connesso, ma non è connesso per archi

- Esistono funzioni che mandano connessi in connessi ma non sono continue, ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Teorema 6.19. *Dati E, F spazi metrici, $f : E \to F$ una funzione continua, se E è compatto allora $f(E)$ è compatto*

Dimostrazione.
Siano y_n una successione a valori in F, x_n una successione a valori in E tali che $f(x_n) = y_n$. Per la compattezza di E si ha che esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in un punto $x \in E$, inoltre poiché f è continua la successione $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ converge in $f(x) \in f(E)$, pertanto $f(E)$ è compatto.

□

Corollario 6.20 (Teorema di Weierstrass)**.** *Dati E uno spazio metrico,*
$f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua, se E è compatto allora f ammette punti di massimo e minimo.

Dimostrazione.
Per la proposizione precedente si ha che $f(E)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ compatto, pertanto è chiuso e limitato. Allora abbiamo che $\inf f(E)$ e $\sup f(E)$ sono dei punti di accumulazione per $f(E)$ e sono contenuti in $f(E)$ in quanto chiuso, pertanto $\inf f(E) = \min f(E)$ e $\sup f(E) = \max f(E)$.

□

Proposizione 6.21. *Date f, φ funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per $\mathbb{R}$, se $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e φ è continua in ℓ strettamente crescente, allora*

$$\limsup_{x \to x_0} (\varphi \circ f)(x) = \varphi(\ell).$$

Dimostrazione.
Per la definizione di limite superiore si ha che esiste una successione x_n a valori in $\mathbb{R}$ convergente in $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$, pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} (\varphi \circ f)(x_n) = \varphi(\ell)$$

per la continuità di φ. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|y - \ell| < \delta \implies |\varphi(y) - \varphi(\ell)| < \varepsilon$ $\forall y \in B_\delta(\ell)$. In corrispondenza di tale δ esiste U intorno di x_0 tale che $f(x) < \ell + \delta/2$ $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$, pertanto $\varphi(f(x)) < \varphi(\ell + \delta/2) < \varphi(\ell) + \varepsilon$, per la crescenza di φ, cioè

$$\lim_{x \to x_0} (\varphi \circ f)(x) = \varphi(\ell).$$

□

6.3 Discontinuità

Definizione 6.22 (Punti di discontinuità)**.** Dato E uno spazio metrico,
$f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in E$ si dice *punto di discontinuità per* f se f non è continua in x_0. Indichiamo l'insieme dei punti di discontinuità per f con $\mathrm{disc}(f) = \{x \in E \mid f \text{ non è continua in } x\}$.

Classifichiamo i punti di discontinuità di una funzione f nel seguente modo:

- f ha una discontinuità eliminabile in x_0 se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- f ha una discontinuità di prima specie (a salto) in x_0 se esistono $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^- \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+ \in \mathbb{R}$ e $\ell^+ \neq \ell^-$
- f ha una discontinuità di seconda specie in x_0 se esistono $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e almeno uno dei due è $\pm\infty$
- f ha una discontinuità di terza specie in x_0 se non esistono $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Osservazione 6.23. Le funzioni monotone hanno solo discontinuità a salto.

Esempi:

- $$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$
  ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$
- $$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
  ha una discontinuità di prima specie in $x = 0$
- $$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$
  ha una discontinuità di terza specie in $x = 0$
- $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \text{(funzione di Dirichlet)}$$
  $\mathrm{disc}(f) = \mathbb{R}$, f non ammette limite in nessun punto del suo dominio
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ \mathrm{mcd}(p, q) = 1 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
  $\mathrm{disc}(f) = \mathbb{Q}$ e tutte le discontinuità sono eliminabili

Osservazione 6.24. $\mathrm{osc}(f)(x_0) > 0 \iff x_0 \in \mathrm{disc}(f)$

Lemma 6.25. *Dati I un insieme, $\underset{i \longmapsto a_i}{f : I \to (0, +\infty)}$, se $\sum_{i \in I} a_i \in \mathbb{R}$ allora I è numerabile.*

Dimostrazione.
Sia $I_N = \{i \in I \mid a_i \geq \frac{1}{N}\}$, abbiamo che $I = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} I_N$. Osserviamo che

$$\frac{1}{N}|I_N| \leq \sum_{i \in I_N} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i \in \mathbb{R},$$

pertanto I_N è un insieme finito. Poiché I è unione numerabile di insiemi finiti si ha che I è numerabile. □

Proposizione 6.26. *Dati E uno spazio metrico, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, se f è monotona allora* $\mathrm{disc}(f)$ *è numerabile.*

Dimostrazione.
Senza perdita di generalità possiamo supporre f crescente. Siano x_1, $x_2 \in E$ tali che $x_1 < x_2$, allora

$$\sum_{x \in (\mathrm{disc}(f) \cap [x_1, x_2])} (\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)) \leq f(x_2) - f(x_1) \in \mathbb{R}.$$

Per il lemma precedente si ha che $\mathrm{disc}(f) \cap [x_1, x_2]$ è numerabile $\forall x_1$, $x_2 \in E$ tali che $x_1 < x_2$, pertanto $\mathrm{disc}(f)$ è numerabile.

□

Corollario 6.27. *Non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che* $\mathrm{disc}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dimostrazione.
Osserviamo che $\mathrm{disc}(f) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} E_N$ con $E_N = \left\{ x_0 \in \mathrm{disc}(f) \mid \mathrm{osc}(f)(x_0) \geq \dfrac{1}{N} \right\}$. Fissato E_N, mostriamo che è un insieme chiuso. Consideriamo un punto $x_0 \in E_N^C = \left\{ x \in \mathrm{disc}(f) \mid \mathrm{osc}(f)(x) < \dfrac{1}{N} \right\}$, abbiamo che $\mathrm{osc}(f)(x_0) = \limsup_{x \to x_0} f(x) - \liminf_{x \to x_0} f(x)$. Posti $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$, $\liminf_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$ si ha che esistono due successioni x_n^+, x_n^- convergenti a x_0 tali che $\lim_{x \to x_0} f(x_n^\pm) = \ell^\pm$. Dalla definizione di limite segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x_n^\pm) - \ell^\pm| < \varepsilon \ \forall x_n \in B_\delta(x_0)$. Ma tale disuguaglianza vale anche per ogni x in un intorno sufficientemente piccolo di x_0, infatti se fosse che frequentemente $f(x) > \ell^+$ per $x \to x_0$ avremmo una successione x'_n tendente a x_0 con $\lim_n f(x'_n) > \ell^+$, contraddicendo la definizione di $\limsup$ (analogamente per ℓ^-). Pertanto esiste δ' tale che in $B_{\delta'}(x_0)$

$$\mathrm{osc}(f)(x) = \limsup_{y \to x} f(x) - \liminf_{y \to x} f(x) \leq \max(f(x)) - \min(f(x)) \leq \mathrm{osc}(f)(x_0) + 2\varepsilon \ \forall x$$

Ma poiché ε è arbitrario, può essere scelto in modo tale che $\mathrm{osc}(f)(x_0) + 2\varepsilon < \frac{1}{N}$, ovvero che esista un intorno di x_0 contenuto in E_N^C. Dunque E_N^C è aperto, cioè E_N è chiuso. Abbiamo quindi che $\mathrm{disc}(f)$ è unione numerabile di insiemi chiusi. Supponiamo per assurdo che $\mathrm{disc}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora avremmo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} E_N$ e $\mathrm{int}(E_N) \subseteq \mathrm{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ (perché i razionali sono densi negli irrazionali), ma allora aggiungendo i punti razionali si avrebbe che anche $\mathbb{R}$ è unione numerabile di chiusi a parte interna vuota, ma questo è assurdo per il Teorema di Baire. Pertanto non esiste tale f.

□

Teorema 6.28. *Dati $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, f è invertibile se e solo se è strettamente monotona.*

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Supponiamo per assurdo che f non sia strettamente monotona, allora esistono x, y, $z \in I$ tali che $x < y < z$ e $(f(x) < f(y)) \wedge (f(z) < f(y))$ oppure $f(x) > f(y) \wedge f(z) > f(y)$ (chiaramente f non può essere costante, in tal caso infatti non sarebbe iniettiva). Consideriamo il primo caso, il secondo si mostra in modo analogo. Senza perdita di generalità possiamo supporre $f(x) < f(z) < f(y)$. Per il teorema dei valori intermedi abbiamo che $f(z) \in [f(x), f(y)] \subseteq f([x, y])$, pertanto esiste $z' \in (x, y)$ tale che $f(z) = f(z')$, ma questo è assurdo in quanto f è iniettiva e $z \neq z'$. Pertanto f è strettamente monotona.

($\Longleftarrow$). Se f è strettamente monotona abbiamo che $f(x) \gtrless f(y) \ \forall x$, $y \in I$ tali che $x \gtrless y$, in particolare $f(x) \neq f(y) \ \forall x$, $y \in I$ tali che $x \neq y$, cioè f è iniettiva (e quindi invertibile).

□

Corollario 6.29. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, se f è invertibile allora f^{-1} è continua.*

Dimostrazione.
Poiché f è invertibile si ha che f è strettamente monotona, in particolare $f^{-1} : f(I) \to I$ è strettamente monotona, pertanto se presenta delle discontinuità queste sono della prima specie (cioè a salto). In tal caso si avrebbe $f^{-1}(f(I)) = I$ non connesso, che è assurdo in quanto I è un intervallo. Pertanto f^{-1} è continua.

□

Osservazione 6.30. Sono continue le funzioni

- $\arcsin x = (\sin x|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$
- $\arccos x = (\cos x|_{[0,\pi]})^{-1}$
- $\arctan x = (\tan x|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$

6.4 Funzioni Lipschitziane

Definizione 6.31 (Funzione lipschitziana)**.** Dati E, F spazi metrici, una funzione f da E in F si dice *lipschitziana di costante* L se $d_F(f(x), f(y)) \leq L d_E(x, y)$ $\forall x,\, y \in E$, con $L > 0$, dove d_E, d_f sono distanze definite rispettivamente su E, F.

Proposizione 6.32. *Dati E uno spazio metrico, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, se f è lipschitziana allora è continua.*

Dimostrazione.
Poiché f è lipschitziana esiste una costante $L \in \mathbb{R}$ tale che $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq L d_E(x, x_0)$ $\forall x,\, x_0 \in E$. Per $x \to x_0$ si ha $d_E(x, x_0) \to 0$, pertanto per il Teorema dei due carabinieri si ha $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, cioè $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto f è continua.

□

Definizione 6.33 (Funzione localmente lipschitziana)**.** Dati E, F spazi metrici, una funzione f da E in F di dice *localmente lipschitziana* se per ogni $x \in E$ esiste U intorno di x tale che $f|_U$ è lipschitziana.

Proposizione 6.34. *Dati E uno spazio metrico, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, se f è localmente lipschitziana allora è continua.*

Dimostrazione.
Per ogni $x_0 \in E$ esiste U intorno di x_0 tale che $f|_U$ è lipschitziana, allora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\forall x_0 \in E$, pertanto f è continua.

□

Definizione 6.35 (Contrazione)**.** Dato M uno spazio metrico, $f : M \to M$ una funzione, f si dice *contrazione* se è una funzione lipschitziana di costante $C < 1$.

Teorema 6.36 (delle contrazioni, del punto fisso di Banach)**.** *Dato M uno spazio metrico completo, $f : M \to M$, se f è una contrazione allora esiste un unico $\overline{x} \in M$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Inoltre per ogni $x_0 \in M$ la successione per ricorrenza* $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ *converge a $\overline{x}$.*

Dimostrazione.

(Unicità). Supponiamo che esistano $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2 \in M$ punti fissi per f, allora

$$d(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = d(f(\overline{x}_1), f(\overline{x}_2)) \leq C d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

con $C < 1$, pertanto si ha $d(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0$, cioè $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$. Pertanto il punto fisso, se esiste, è unico.

(Esistenza). Fissiamo $x_0 \in M$, consideriamo la successione per ricorrenza data da $x_{n+1} = f(x_n)$. Poiché f è lipschitziana si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C d(x_n, x_{n-1}) \leq C^n d(x_1, x_0), \text{ con } C < 1.$$

Osserviamo che x_n è una successione di Cauchy, infatti $\forall m$, n con $m > n$ si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} C^k \leq C^n d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{+\infty} C^j = \frac{C^n d(x_1, x_0)}{1 - C}.$$

Poiché M è uno spazio metrico completo si ha che esiste $\overline{x} \in M$ tale che la successione x_n converge in $\overline{x}$. Poiché f è una funzione continua si ha che $\overline{x} = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\overline{x})$, pertanto $\overline{x}$ è un punto fisso per f.

$\square$

Capitolo 7

Calcolo dei limiti

7.1 Simboli di Landau

Definizione 7.1 (O-grande)**.** Dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $I \subseteq \mathbb{R}$, f, g funzioni da I in $\mathbb{R}$, se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ diciamo che $g = O(f)$ se esistono $C > 0$, U intorno di x_0 tali che $|g(x)| \leq C|f(x)|$ $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$.

Definizione 7.2 (o-piccolo)**.** Dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $I \subseteq \mathbb{R}$, f, g funzioni da I in $\mathbb{R}$, se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ diciamo che $g = o(f)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste U intorno di x_0 tale che $|g(x)| \leq \varepsilon|f(x)|$ $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$.

Osservazione 7.3. Possiamo riformulare le due definizioni in modo equivalente:

- $g = O(f)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \in \mathbb{R}$
- $g = o(f)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} = 0$

Valgono le seguenti proprietà:

- $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$
- $f \cdot O(g) = O(f \cdot g)$
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$
- $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$
- $o(f) + o(g) = o(\max\{f, g\})$
- $O(f) + O(g) = O(\max\{f, g\})$

Teorema 7.4 (Principio di eliminazione degli infinitesimi)**.** *Date f, g funzioni da un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per I, se esistono i limiti allora*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + o(f)}{g(x) + o(g)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dimostrazione.
Dalle proprietà di o si ha $\frac{f(x) + o(f)}{g(x) + o(g)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}$. Osserviamo che $\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} - 1 = \frac{o(1)}{1 + o(1)} = o(1)$, pertanto $\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1 + o(1)$. Allora abbiamo $\frac{f(x) + o(f)}{g(x) + o(g)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{f(x)}{g(x)} + o\left(\frac{f}{g}\right)$ da cui

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + o(f)}{g(x) + o(g)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} + o\left(\frac{f}{g}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

□

Definizione 7.5 (Equivalenza asintotica)**.** Due funzioni f, g da un insieme $I \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ si dicono *asintoticamente equivalenti* (e scriviamo $f \sim g$) se, dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per I, si ha $f - g = o(g)$ per $x \to x_0$.

Osservazione 7.6.

- La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza
- Possiamo definire una relazione di equivalenza sulle funzioni indotta da O ponendo $f \asymp g \iff f = O(g)$ e $g = O(f)$ per $x \to x_0$. Le classi di equivalenza di $\asymp$ sono dette *ordini di grandezza* e tale relazione generalizza l'equivalenza asintotica
- Se esiste $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ allora $f \sim g$ per $x \to x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Proposizione 7.7. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, f, g funzioni da I in $\mathbb{R}$, se $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ e $f(x) = O(x^m)$, $g(x) = o(x^n)$ per $x \to x_0$, allora $(f \circ g)(x) = o(x^{nm})$ e $(g \circ f) = o(x^{nm})$ per $x \to 0$.*

Dimostrazione.
Poiché $f(x) = O(x^m)$ per $x \to 0$ si ha che esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq C|x|^m$ in un intorno di 0, pertanto $f(g(x)) \leq C|g(x)|^m$ in un intorno di 0. D'altra parte $g(x) = x^n \cdot \omega(x)$, con $\omega(x) = o(1)$, in un intorno di 0, pertanto $f(g(x)) \leq C|x|^{nm} \cdot |\omega(x)|^m = C|x|^m \cdot o(1)$, cioè $f(g(x)) = o(x^{nm})$ per $x \to 0$. Analogamente $g(f(x)) = (f(x))^n \cdot o(1)$ in un intorno di 0, quindi $g(f(x)) \leq (C|x|^m)^n \cdot o(1)$ in un intorno di 0, cioè $g(f(x)) = o(x^{nm})$ per $x \to 0$.

□

7.2 Limiti di funzioni razionali

Definizione 7.8 (Funzione razionale)**.** Chiamiamo *funzione razionale reale* una funzione del tipo $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x),\ q(x) \in \mathbb{R}[x],\ q(x) \neq 0$. Se non specificato parleremo sempre di funzioni razionali a coefficienti reali.

Teorema 7.9. *Dati $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$, allora*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & n > m \ (\textit{a seconda del segno di } \frac{a_n}{b_m}) \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & m > n \end{cases}$$

Dimostrazione.
Raccogliendo il termine di testa abbiamo $p(x) = a_n x^n \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} x^{i-n}\right)$,
$q(x) = b_m x^m \left(1 + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{b_i}{b_m} x^{i-m}\right)$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} x^{i-n}\right)}{\left(1 + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{b_i}{b_m} x^{i-m}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^{n-m}}{b_m}$$

da cui la tesi.

□

7.3 Limiti di funzioni trigonometriche

Proposizione 7.10. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, *cioè* $\sin x = x + o(x)$ *per* $x \to 0$.

Dimostrazione.
Si osserva che $\sin x \leq x \leq \tan x$, dividendo per $\sin x$ si ottiene $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$. Per il Teorema dei due carabinieri si ha quindi $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, cioè $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$.

□

Osservazione 7.11. $\tan x = x + o(x)$ per $x \to 0$.

Proposizione 7.12. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, *cioè* $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *per* $x \to 0$.

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

□

7.4 La funzione esponenziale e il numero e

Proposizione 7.13. *Data* x_n *una successione a valori in* $\mathbb{R}$*, se* x_n *è monotona e limitata allora converge.*

Dimostrazione.
Consideriamo l'insieme $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, distinguiamo due casi.

- Se X è un insieme finito allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x_n = x$ frequentemente. In particolare, poiché X è limitato, per la monotonia di x_n si ha $x_n = x$ definitivamente, pertanto $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$.
- Se X è un insieme infinito esiste $x \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per X per il teorema di Bolzano-Weierstrass, inoltre questo è unico per la monotonia di x_n. Se x_n è crescente allora tale punto di accumulazione è $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, se x_n è decrescente è $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

□

Lemma 7.14. $k! \geq 2^{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Mostriamo la tesi per induzione su $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 1$ la tesi è verificata in quanto si ha $1! \geq 2^{1-1}$, cioè $1 \geq 1$. Per $k > 1$ supponiamo che la tesi sia vera per $k - 1$, allora $k! = k(k-1)! \geq 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$.

□

Lemma 7.15.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \ \forall x \neq 1$$

Dimostrazione.
Siano a, $b \in \mathbb{R}$, abbiamo che $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$. Sostituendo con $a = 1$, $b = x$ otteniamo $1 - x^{n+1} = (1 - x) \sum_{k=0}^{n} x^k$ se $x \neq 1$, da cui $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

□

Proposizione 7.16. *La successione* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *è crescente e limitata, in particolare, converge nell'intervallo* $(2, 3)$.

Dimostrazione.
Mostriamo separatamente che x_n è crescente e limitata.

(Crescente). Sviluppando la successione come potenza di binomio si ottiene

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\; n^k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-\frac{j}{n}\right).$$

Utilizzando questa espressione per x_n possiamo osservare che

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-\frac{j}{n+1}\right) > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-\frac{j}{n+1}\right) >$$
$$> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-\frac{j}{n}\right) = x_n,$$

pertanto la successione è crescente.

(Limitata). Applicando i lemmi precedenti otteniamo

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-\frac{j}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} =$$
$$= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.$$

pertanto $x_n < 3\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Poiché crescente e limitata, e $x_1 = 2$, si ha che x_n converge in $(2,3)$.

$\square$

Definizione 7.17 (Numero di Eulero)**.** Definiamo il numero e come il limite, per $n \to +\infty$, della successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Proposizione 7.18. *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha* $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^t$.

Dimostrazione.
Chiaramente se $t = 0$ la successione è costante e tende a $1 = e^0$. Se $t > 0$ osserviamo che $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n/t}\right)^{\frac{n}{t}}\right)^t$, pertanto ponendo $x = \frac{n}{t}$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^t = e^t$. Se $t < 0$ possiamo scrivere $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{1+x}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1+1}$. Sostituendo $y = -x-1$ abbiamo

$$\lim_{y\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}\right)^t = \lim_{y\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \left(1+\frac{1}{y}\right)\right)^t =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(e\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)\right)^t = e^t.$$

$\square$

Proposizione 7.19. $1 + x \leq e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}\ \forall x < 1$.

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Bernoulli otteniamo $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$. Poiché la successione $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è crescente e converge in e^x si ha che $e^x \geq 1+x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Dalla disuguaglianza $e^{-x} \geq 1-x$ otteniamo $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ per $x<1$.

□

Teorema 7.20 (Formula di Stirling)**.**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Proposizione 7.21. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$*, cioè* $e^x = 1+x+o(x)$ *per* $x \to 0$.

Dimostrazione.
Per $x<1$ vale la disuguaglianza $1+x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$, da cui
$0 \leq e^x - x - 1 \leq \dfrac{x^2}{1-x}$. Dividendo per x si ha $0 \leq \dfrac{e^x-x-1}{x} \leq \dfrac{x}{1-x}$ e passando ai limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x} = 0$ per il Teorema dei due carabinieri, cioè $e^x - x - 1 = o(x)$ per $x \to 0$ e quindi $e^x = 1+x+o(x)$ per $x \to 0$.

□

Definizione 7.22 (Logaritmo naturale)**.** Definiamo la funzione *logaritmo naturale* come inversa della funzione esponenziale in base e, cioè
$e^{\log x} = x$ $\forall x > 0$.

Proposizione 7.23. $\dfrac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ $\forall x > -1$.

Dimostrazione.
Poiché $e^x \geq 1+x$ $\forall x \in \mathbb{R}$, sostituendo con $1+t = e^x$ abbiamo
$t \geq \log(1+t)$. Inoltre per ogni $x > -1$ si ha $-\log(1+x) = \log\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \log\left(1+\dfrac{1}{1+x}-1\right) = \log\left(1+\dfrac{x}{1+x}\right) \leq -\dfrac{x}{x+1}$, pertanto $\log(1+x) \geq \dfrac{x}{1+x}$ $\forall x > -1$.

□

Proposizione 7.24. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$*, cioè* $\log(1+x) = x + o(x)$ *per* $x \to 0$.

Dimostrazione.
Dividendo per x i termini della disuguaglianza $\dfrac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ si ottiene $\dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{\log(1+x)}{x} \leq 1$.
Per il Teorema dei due carabinieri si ha quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$. □

7.5 Criteri di convergenza per le successioni

Proposizione 7.25. *Date a_n, b_n successioni a valori definitivamente positivi, se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall n \geq n_0$ *allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \geq C b_n$ $\forall n \geq n_0$.*

Dimostrazione.
Riscriviamo l'ipotesi come $a_{n+1}b_n \geq b_{n+1}a_n$ $\forall n \geq n_0$, da cui ricaviamo $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \geq \dfrac{a_n}{b_n}$ $\forall n \geq n_0$. Poniamo $r_n = \frac{a_n}{b_n}$, si ha che $r_{n+1} \geq r_n$ $\forall n \geq n_0$, in particolare $r_n \geq r_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$, cioè $\dfrac{a_n}{b_n} \geq \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$. Ponendo $C = \dfrac{a_0}{b_0}$ si ha $a_n \geq C b_n$.

□

Corollario 7.26. *Date a_n, $b_n = b^n$ successioni a valori in $\mathbb{R}_+$ definitivamente*

1. *se esiste $n_0 \in N$ tale che* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = b$ $\forall n \geq n_0$ *allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq C b^n$ $\forall n \geq n_0$*

2. se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ *tale che* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ *allora* $\forall b > \ell\ \exists C \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ *tali che* $a_n \leq Cb^n\ \forall n \geq n_0$

Dimostrazione.

1. Deriva dalla proposizione precedente.

2. Per $\ell < b$ si ha che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \in (-\infty, b)$ definitivamente, cioè $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$ definitivamente. Pertanto per il punto precedente esistono $C \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che $a_n \leq Cb^n\ \forall n \geq n_0$.

□

Lemma 7.27.

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 1 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \\ 0 & |a| < 1 \\ \textit{non esiste} & a < -1 \end{cases}$$

Dimostrazione.

$(a = 1)$. Se $a = 1$ allora $a^n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi la successione è costante e in particolare ha limite 1.

$(a > 1)$. Sia $a = 1 + \delta$ con $\delta > 0$, per la disuguaglianza di Bernoulli si ha $(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta$. Poiché $\delta > 0$ si ha $\lim_{n\to+\infty} n\delta = +\infty$, pertanto $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

$(|a| < 1)$. Consideriamo la successione $|a^n|$, osserviamo che $|a^n| = |a|^n$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $|a| = \frac{1}{1+\varepsilon}$, per il punto precedente si ha che $\lim_{n\to+\infty}(1+\varepsilon)^n = +\infty$, pertanto $\lim_{n\to+\infty} |a^n| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n = 0$.

$(a < -1)$. Sia $a_n = a^n$ supponiamo per assurdo che esista (eventualmente non finito) $\lim_{n\to+\infty} a_n$. Consideriamo le sottosuccessioni di $b_n = a^{2n}$, $c_n = a^{2n+1}$, si ha che $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} c_n = -\infty$, pertanto la successione a_n non ammette limite.

□

Proposizione 7.28 (Criterio del rapporto)**.** *Data* a_n *una successione a valori in* $\mathbb{R}_+$ *definitivamente, tale che* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}$*, allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \ell < 1 \\ +\infty & \ell > 1 \end{cases}.$$

Dimostrazione.

$(\ell < 1)$. Siano $b \in (\ell, 1)$, $C > 0$ tali che $0 \leq a_n \leq Cb^n$, poiché $|b| < 1$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} Cb^n = 0$, quindi per il Teorema dei due carabinieri $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$(\ell > 1)$. Siano $b \in (1, \ell)$, $C > 0$ tali che $a_n \geq Cb^n$, poiché $b > 1$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} Cb^n = +\infty$, pertanto $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

□

Lemma 7.29 (Somma telescopica)**.**

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

Dimostrazione.
Mostriamo la tesi per induzione su n. Per $n = 1$ si ha l'identità $a_2 - a_1 = a_2 - a_1$. Per $n > 1$ supponiamo che la tesi sia vera per una somma della forma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$, allora abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_n + a_n - a_1 = a_{n+1} - a_1.$$

□

Proposizione 7.30. *Data* $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *esiste* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tale che* $a_n = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$ *per* $n \to +\infty$*.*

Dimostrazione.
Osserviamo che la successione $x_n = a_n - 2\sqrt{n}$ è decrescente, infatti

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \\ = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pertanto
$0 \leq x_n - x_{n+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, in particolare $x_{n+1} \leq x_n$, quindi x_n è decrescente. Inoltre x_n è inferiormente limitata, infatti

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \geq x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \geq x_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \geq -2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq -2.$$

Pertanto esiste $\alpha \geq -2$ tale che $x_n \to \alpha$ per $n \to +\infty$, cioè $a_n = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$ per $n \to +\infty$.

□

Proposizione 7.31 (Criterio di Cesaro)**.** *Data* a_n *successione a valori complessi, se esiste finito* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{C}$ *allora* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$*.*

Dimostrazione.
Poiché $a_n = \ell + o(1)$ per $n \to +\infty$ si ha che $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell) = o(1)$, cioè $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell + o(1)$. Passando ai limiti quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$.

□

Proposizione 7.32. *Data* a_n *una successione a valori in* $\mathbb{R}_+$*, se esiste finito* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ *allora* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$*.*

Dimostrazione.
Poniamo $x_n = \log a_n$, allora $\log \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{n}x_n$, $x_{n+1} - x_n = \log\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Osserviamo che $x_n = x_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)$, da cui $\displaystyle\frac{1}{n}x_n = \frac{1}{n}x_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{n}\log a_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$. Per il Criterio di Cesaro quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}x_n = \log \ell$, cioè $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{a_n} = \log \ell$ e quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

□

Proposizione 7.33. *Date $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua strettamente monotona e x_n la successione a valori in in $\mathbb{R}$ definita dalla ricorsione* $\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ *, con $\alpha \in \mathbb{R}$, allora esiste $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Inoltre se $\ell \in \mathbb{R}$ si ha $\ell = f(\ell)$.*

Dimostrazione.
Supponiamo senza perdita di generalità che f sia crescente, se $f(\alpha) = \alpha$ allora $x_n = \alpha\, \forall n \in \mathbb{N}$, pertanto x_n è una successione costante e il suo limite è α. Se $f(\alpha) > \alpha$, consideriamo l'insieme $U = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x)-x > 0\}$. Osserviamo che $\alpha \in U$ e che U è un insieme aperto. Siano adesso $V^- = \{a' \leq \alpha \mid [a', \alpha] \subseteq U\}$, $V^+ = \{b' \geq \alpha \mid [\alpha, b'] \subseteq U\}$, poniamo $a = \inf V^-$, $b = \sup V^+$. Per ogni $a' \in V^-$ si ha $f(a') - a' > 0$, pertanto $f(a) - a \geq 0$. Supponiamo per assurdo che sia $f(a) - a > 0$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(\overline{a}) - \overline{a} > 0\ \forall \overline{a} \in (a - \varepsilon, a)$, ma allora a non sarebbe l'estremo inferiore di V^-, che è assurdo, pertanto $f(a) = a$. Ragionando allo stesso modo si ha che $f(b) = b$. Consideriamo adesso $x \in \mathbb{R}$ tale che $a < x < b$, se $b \in \mathbb{R}$ per la monotonia di f si ha $a = f(a) < f(x) < f(b) = b$, pertanto $f((a, b)) = (a, b)$. Poiché $\alpha \in (a, b)$ abbiamo che x_n è strettamente crescente e limitata in (a, b), pertanto converge a $\ell \in (a, b)$. Inoltre per la continuità di f si ha $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell)$. Se $b = +\infty$ allora x_n è strettamente crescente e non limitata, pertanto non ha limite finito. Se $f(\alpha) < \alpha$ si ragiona in modo analogo.

□

Proposizione 7.34 (Lemma di Fekete)**.** *Data a_n una successione a valori in $\mathbb{R}_+$, se a_n è subadditiva, cioè $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ $\forall n$, $m \in \mathbb{N}$, allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.*

Dimostrazione.
Sia $\sigma = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$, poiché a_n è subadditiva si ha $a_n \leq na_1\ \forall n \in \mathbb{N}$, in particolare $\sigma \in [0, a_1]$. Per definizione di σ, $\forall \varepsilon > 0$ esiste $n' \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a_{n'}}{n'} < \sigma + \varepsilon$. Fissati $\varepsilon > 0$, $n > n'$, scriviamo $n = kn' + r$ con $0 \leq r < n'$, abbiamo quindi $a_n \leq ka_{n'} + a_r$. Posto $M = \max\{a_1, \dots, a_{n'-1}\}$ si ha che

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{k}{n} a_{n'} + \frac{M}{n} \leq \frac{kn'}{n} \frac{a_{n'}}{n'} + \frac{M}{n} \leq \frac{n-r}{n}(\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n}.$$

Pertanto $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \left(\left(1 - \frac{r}{n}\right)(\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n}\right) = \sigma + \varepsilon$, cioè $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \sigma$. D'altra parte $\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \geq \sigma$, quindi $\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.

□

7.6 Somme armoniche

In questa sezione indicheremo con $H(n)$ la successione delle somme armoniche $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Proposizione 7.35. *La successione $H(n)$ diverge.*

Dimostrazione.
Dalla disuguaglianza $x \geq \log(1 + x)$, sostituendo $\frac{1}{k} = x$, otteniamo $\frac{1}{k} \geq \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ $\forall k > -1$, quindi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k) = \log(n+1).$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} H(n) = +\infty$.

□

Proposizione 7.36. *Esiste $\gamma \in (0, 1)$ tale che $H(n) = \log n + \gamma + o(1)$ per $n \to +\infty$.*

Dimostrazione.
Sia $\gamma_n = H(n) - \log n$, osserviamo che γ_n è una successione decrescente, infatti

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Sostituendo $\dfrac{1}{n} = k$ si ha $\dfrac{k}{k+1} - \log(k+1) \leq 0$, pertanto la successione è decrescente, in particolare $\gamma_n < \gamma_1 = 1 \ \forall n > 1$. Osserviamo che γ_n è a termini positivi, infatti $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1)$ e quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \geq \log(n+1) - \log n > 0$, pertanto γ_n ammette limite e si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n = \gamma \in [0,1)$.
Mostriamo che $\gamma > 0$. Consideriamo la successione $\alpha_n = H(n) - \log(n+1)$, α_n è crescente e a termini positivi, infatti $H(n) \geq \log(n+1) \ \forall n > 0$. Osserviamo che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \gamma$, infatti $\gamma_n - \alpha_n = H(n) - \log n - H(n) + \log(n+1) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, pertanto $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \gamma_n - \alpha_n = 0$, cioè $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \gamma$. Pertanto si ha $H(n) = \log n + \gamma + o(1)$ con $\gamma \in (0,1)$ per $n \to +\infty$.

□

Capitolo 8

Serie

Definizione 8.1 (Serie)**.** Una *serie* è una somma formale di elementi in uno spazio vettoriale metrico V del tipo $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$. Le quantità $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} x_n$, con $N \geq n_0$, si dicono *somme parziali della serie.*

Definizione 8.2 (Convergenza)**.** La serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ si dice *convergente* se esiste $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} x_n \in V$. Nel caso in cui $V = \mathbb{R}$ distinguiamo tre comportamenti:

1. se $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} x_n \in \mathbb{R}$ la serie si dice *convergente*
2. se $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} x_n = \pm\infty$ la serie si dice *divergente*
3. se non esiste il limite delle somme parziali la serie si dice *non convergente* o *indeterminata*

Osservazione 8.3. Nel caso in cui $x_n \in \mathbb{C}$ diciamo che $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ converge se convergono le serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} \Re(x_n)$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} \Im(x_n)$.

A meno di specificazioni considereremo sempre il caso $V = \mathbb{R}$.

Proposizione 8.4 (Condizione necessaria)**.** *Data $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ una serie, se la serie converge allora $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.*

Dimostrazione.
Poniamo $S = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ e S_N la successione delle somme parziali, si ha che $x_n = S_n - S_{n-1}$. Passando al limite $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$.

□

Proposizione 8.5 (Criterio di Cauchy)**.** *Data $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ una serie e S_N la successione delle sue somme parziali, la serie converge se e solo se S_N è una successione di Cauchy, cioè se $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\left| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \right| = |S_M - S_N| < \varepsilon\ \forall N,\ M > n_\varepsilon$.*

Dimostrazione.
Poiché la serie converge si ha che S_N è una successione convergente in $\mathbb{R}$, pertanto è una successione di

Cauchy. Viceversa se S_N è una successione di Cauchy si ha che $\lim_{N\to+\infty} S_N \in \mathbb{R}$, pertanto la serie converge.

$\square$

Osservazione 8.6.

(Geometrica). Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, S_N la successione delle sue somme parziali. In generale abbiamo $S_N =$

$$\begin{cases} N+1 & x=1 \\ \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x} & x\neq 1 \end{cases} \text{ e } \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & |x|<1 \\ +\infty & x>1 \\ \text{non esiste} & x\leq -1 \end{cases}, \text{ pertanto } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x|<1 \\ +\infty & x\geq 1 \\ \text{non converge} & x\leq -1 \end{cases}$$

(Telescopica). Data x_n una successione convergente in $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$. Si ha

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{N\to\infty} x_{N+1} - x_{n_0} = x - x_{n_0}.$$

8.1 Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Se non specificato le successioni di questa sezione saranno tutte a termini reali positivi.

Proposizione 8.7 (Criterio del confronto)**.** *Date x_n, y_n due successioni, se $0 \leq x_n \leq y_n$ definitivamente e $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n = +\infty$ allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n = +\infty$ (equivalentemente $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \in \mathbb{R}$).*

Dimostrazione.
Siano $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} x_n$, $T_N = \sum_{n=n_0}^{N} y_n$ le successioni delle somme parziali, poiché x_n e y_n sono definitivamente successioni a termini positivi si ha che esiste $n' \in \mathbb{N}$ tale che S_N e T_N sono crescenti $\forall N > n'$. In particolare si ha $S_N - S_{n'} \leq T_N - T_{n'}$ $\forall N > n'$, pertanto passando ai limiti si ha che se $\lim_{N\to+\infty} S_N - S_{n'} = +\infty$ allora $\lim_{N\to+\infty} T_N - T_{n'} = +\infty$, da cui la tesi.

$\square$

Proposizione 8.8 (Criterio di condensazione)**.** *Data x_n una successione decrescente a termini positivi, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se e solo se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ converge.*

Dimostrazione.
Consideriamo la successione $y_k = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} x_n$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} y_k$. Inoltre, poiché x_n è decrescente, abbiamo $\frac{1}{2}(2^{k+1} x_{2^{k+1}}) = 2^k x_{2^{k+1}} \leq y_k = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} x_n \leq 2^k x_{2^k}$. Per il Criterio del confronto allora $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se e solo se $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ converge se e solo se $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ converge.

$\square$

Proposizione 8.9 (Serie armonica generalizzata)**.** *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.*

Dimostrazione.
Per il Criterio di condensazione la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} \in \mathbb{R} \iff \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k \in \mathbb{R} \iff \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \iff 2^{\alpha-1} > 1 \iff \alpha > 1.$$

$\square$

Proposizione 8.10 (Criterio del confronto asintotico). *Date a_n, b_n successioni, se $a_n \sim b_n$ allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_n$ converge.*

Dimostrazione.
Poiché $a_n \sim b_n$ per ogni $\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $(1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n \ \forall n \geq n_\varepsilon$, pertanto per il Criterio del confronto si ha la tesi.

$\square$

Osservazione 8.11. È sufficiente che sussista una delle seguenti condizioni:

- esistono $c, C \in \mathbb{R}$ tali che $c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C$ definitivamente
- $0 < \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$
- $a_n = O(b_n)$ e $b_n = O(a_n)$ per $n \to +\infty$, cioè $a_n \asymp b_n$

Proposizione 8.12 (Criterio del rapporto). *Data a_n una successione a termini positivi, abbiamo che*

1. *se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ definitivamente, $r \in (0,1)$, allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge*
2. *se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ definitivamente allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge*

Dimostrazione.

1. Per ipotesi esiste $n' \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1 \ \forall n \geq n'$, in particolare esiste $C > 0$ tale che $a_n < Cr^n$ definitivamente. Poiché $r < 1$ si ha che la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} Cr^n$ converge, pertanto anche la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ per il criterio del confronto.
2. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ per ogni $n > n'$ si ha che la successione è definitivamente costante, pertanto la serie diverge. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ definitivamente si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pertanto per il Criterio del rapporto per le successioni si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, quindi la serie diverge.

$\square$

Osservazione 8.13. Se esiste finito $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ si hanno i seguenti casi:

- se $r > 1$ allora la serie diverge
- se $r < 1$ allora la serie converge
- se $r = 1$ non abbiamo informazioni sulla convergenza

Proposizione 8.14 (Criterio della radice). *Data a_n una successione, abbiamo che*

1. *se $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ definitivamente, $r \in (0,1)$, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge*
2. *se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ definitivamente allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge*

Dimostrazione.

- Se $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ definitivamente allora $a_n \leq r^n$ definitivamente. Poiché $r \in (0,1)$ si ha che $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$ converge, pertanto per il Criterio del confronto anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
- Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ definitivamente allora $a_n \geq 1$ definitivamente, pertanto la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.

□

8.2 Criteri di convergenza per serie a termini generali

Se non specificato le successioni in questa sezione saranno a termini generali.

Definizione 8.15 (Assoluta convergenza)**.** Data a_n una successione a valori in $\mathbb{C}$, si dice che la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

- *converge semplicemente* se la successione delle sue somme parziali converge
- *converge assolutamente* se la sere $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge semplicemente

Proposizione 8.16. *Data a_n una successione, se la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge semplicemente.*

Dimostrazione.
Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, per il Criterio di Cauchy $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{n=N}^{M} |a_n| < \varepsilon$ $\forall N$, $M \geq n_\varepsilon$. Allora per disuguaglianza triangolare si ha $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n\right| \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n| < \varepsilon$, pertanto la serie converge semplicemente.

□

Proposizione 8.17 (Criterio di Leibniz)**.** *Data a_n una successione, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e a_n è definitivamente decrescente e a termini positivi, allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.*

Dimostrazione.
Supponiamo senza perdita di generalità che n_0 sia pari. Posta S_N la successione delle somme parziali della serie, consideriamo le sottosuccessioni S_{n_0+2k}, S_{n_0+2k+1}, $k \in \mathbb{N}$. Poiché a_n è definitivamente decrescente si ha che S_{n_0+2k} è definitivamente decrescente e S_{n_0+2k+1} è definitivamente crescente. Inoltre entrambe le sottosuccessioni sono limitate, infatti $S_{n_0+2k} \geq S_{n_0+1}$ e $S_{n_0+2k+1} \leq S_{n_0}$ per ogni $k \geq 1$, pertanto esistono finiti $\lim_{k\to+\infty} S_{n_0+2k} = \ell$, $\lim_{k\to+\infty} S_{n_0+2k+1} = \ell'$. Osserviamo che $a_{n_0+2k+1} = |S_{n_0+2k+1} - S_{n_0+2k}|$, pertanto $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} |S_{n_0+2k+1} - S_{n_0+2k}| = |\ell' - \ell| = 0$, cioè $\ell = \ell'$. Pertanto la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

□

Lemma 8.18 (Somma per parti)**.** *Date a_n, b_n successioni a valori in $\mathbb{C}$, posta $B_i = \sum_{n=n_0}^{i} b_n$, si ha*

$$\sum_{n=N}^{M} a_n b_n = \left(\sum_{n=N}^{M} (a_n - a_{n+1}) B_n\right) + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1} \ \forall N,\ M > n_0.$$

Dimostrazione.
Osserviamo che $b_n = B_n - B_{n-1}$, quindi

$$\sum_{n=N}^{M} a_n b_n = \sum_{n=N}^{M} a_n B_n - \sum_{n=N}^{M} a_n B_{n-1} = \sum_{n=N}^{M} a_n B_n - \sum_{n=N-1}^{M-1} a_{n+1} B_n =$$
$$= \left(\sum_{n=N}^{M} (a_n - a_{n+1}) B_n\right) + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}.$$

□

Proposizione 8.19 (Criterio di Dirichlet). *Date a_n, b_n successioni a valori in $\mathbb{C}$, se:*

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
2. *a_n ha variazione limitata, cioè* $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \in \mathbb{R}$
3. *la successione* $B_N = \sum_{n=n_0}^{N} b_n$ *è limitata, cioè* $\exists C \in \mathbb{R}$ *tale che* $|B_N| \leq C \ \forall N \geq n_0$

allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

Dimostrazione.
Posta $B_i = \sum_{n=n_0}^{i} b_n$, consideriamo l'assoluta convergenza della serie. Per N, $M > n_0$, sommando per parti otteniamo

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| = \left|\left(\sum_{n=N}^{M} (a_n - a_{n+1}) B_n\right) + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}\right| \leq$$
$$\leq \left(\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \cdot |B_n|\right) + |a_{M+1} B_M| + |a_N B_{N-1}| \leq C \left(\left(\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}|\right) + |a_{M+1}| + |a_N|\right).$$

Poiché a_n ha variazione limitata e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ si ha che a_n e la successione delle somme parziali di $|a_{n+1} - a_n|$ sono successioni di Cauchy, pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che $\sum_{n=N}^{M} |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, $|a_N| < \varepsilon$ per ogni $N, M > n_\varepsilon$, pertanto si ha

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| < 3C\varepsilon,$$

cioè la successione delle somme parziali della serie è una successione di Cauchy, pertanto converge.

□

Osservazione 8.20.

- Ponendo $b_n = (-1)^n$ si ha il Criterio di Leibniz
- Se a_n ha variazione limitata allora a_n è una successione di Cauchy. Infatti

$$|a_N - a_M| = \left|\sum_{n=N}^{M} (a_n - a_{n+1})\right| \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$$

  definitivamente per un opportuno $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Proposizione 8.21 (Criterio di Abel). *Date a_n, b_n successioni a valori in $\mathbb{C}$, se:*

1. a_n ha variazione limitata, cioè $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ *converge*

allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

Dimostrazione. Posta $B_i = \sum_{n=n_0}^{i} b_n$, consideriamo l'assoluta convergenza della serie. Sommando per parti otteniamo

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| = \left|\left(\sum_{n=N}^{M} (a_n - a_{n+1}) B_n\right) + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}\right| \leq$$
$$\leq \left(\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \cdot |B_n|\right) + |a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}|.$$

Poiché B_n converge esistono σ, $\varepsilon > 0$ tali che

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_m\right| \leq (\sigma + \varepsilon)\left(\left(\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}|\right) + |a_{M+1} - a_N|\right).$$

Inoltre si ha che $|a_{M+1} - a_N| \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}|$ e che esistono $\delta > 0$, $n_\varepsilon \in N$ tali che $\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| < \delta$ $\forall N, M > n_\varepsilon$, pertanto $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| < 2\delta$ $\forall N, M > n_\varepsilon$, cioè la serie converge.

□

8.3 Serie di potenze

Definizione 8.22 (Serie di potenze)**.** Una *serie di potenze* è una serie della forma $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, dove z, $z_0 \in \mathbb{C}$ e a_n è una successione a valori in $\mathbb{C}$.

Studiamo la convergenza assoluta di una generica serie di potenze $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ con $z, z_0 \in \mathbb{C}$ e a_n una successione a valori in $\mathbb{C}$. Per il criterio della radice si ha che la serie converge assolutamente se

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = \limsup_{n\to+\infty} |z - z_0| \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ , cioè se } |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Definizione 8.23 (Raggio di convergenza)**.** Data una serie di potenze $\sum_{n=n_0}^{M} a_n (z - z_0)^n$ diciamo che $R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ è il *raggio di convergenza* della serie, con la convenzione che $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Quindi la serie di potenze $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge assolutamente per $|z - z_0| < R$. Se $|z - z_0| > R$ allora si ha che $\limsup_{n\to+\infty} |a_n (z - z_0)^n| > 1$, pertanto $\limsup_{n\to+\infty} a_n (z - z_0)^n \neq 0$ e la serie non converge. La convergenza per $|z - z_0| = R$ deve essere studiata a parte.

Proposizione 8.24. *Dati $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ e la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, R il raggio di convergenza della serie, se $|z-z_0| = R$, $z - z_0 \neq R$ e se la successione $a_n R^n$ ha variazione limitata e tende a 0 allora la serie di potenze converge.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere la serie come

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n R^n) \left(\frac{z-z_0}{R}\right)^n.$$

Per $|z-z_0| = R$, $z - z_0 \neq R$ si ha

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z-z_0}{R}\right)^n\right| = \left|\frac{1-\left(\frac{z-z_0}{R}\right)^{N+1}}{1-\frac{z-z_0}{R}}\right| \leq \frac{2}{\left|1-\frac{z-z_0}{R}\right|}.$$

La serie rispetta quindi le ipotesi del Criterio di Dirichlet, pertanto converge.

□

Definizione 8.25 (Convergenza uniforme)**.** Data f_n una successione di funzioni, si dice che f_n *converge uniformemente* su E a $f : E \to \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in E$, $\forall n \geq n_0$.

Lemma 8.26. *Dati $z_0 \in \mathbb{C}$, a_n una successione a valori in $\mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}$ il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, i polinomi $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$ convergono uniformemente su $B_{R'}(z_0)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $\forall R' < R$.*

Dimostrazione.
Sia $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ la funzione tale che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $\forall z \in B_R(z_0)$. Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge $\forall z \in B_R(z_0)$ si ha che f è ben definita sul suo dominio. Fissato $z \in B_R(z_0)$, studiamo la convergenza assoluta della successione $x_N = f(z) - S_N(z)$:

$$|x_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |z-z_0|^n.$$

Osserviamo che per ogni $R' \in (|z-z_0|, R)$ esiste $z' \in B_{R'}(z_0)$ tale che $|z'-z_0| = R'$. Allora si ha

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |z-z_0|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|(R')^n = \varepsilon > 0,$$

in particolare $|x_N| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, per ogni $\varepsilon \in B_R(z_0) \cap \mathbb{R}$, per ogni $z \in B_{R'}(z_0)$, da cui la convergenza uniforme.

□

Proposizione 8.27. *Dati $z_0 \in \mathbb{C}$, a_n una successione a valori in $\mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}$ il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, la funzione $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ è continua su $B_R(z_0)$.*

Dimostrazione.
Fissato $w \in B_R(z_0)$, mostriamo che f è continua in w. Poiché $B_R(z_0)$ è un insieme aperto esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(w) \subseteq B_R(z_0)$, cioè $|w-z_0| + \delta < R$. Sia $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$ la successione delle somme parziali di $f(z)$ $\forall z \in B_R(z_0)$, abbiamo

$$\begin{aligned}|f(z) - f(w)| &= |S_N(z) - S_N(w) + f(z) - f(w) - S_N(z) + S_N(w)| \leq \\ &\leq |S_N(z) - S_N(w)| + |f(z) - S_N(z)| + |f(w) - S_N(w)|\end{aligned}$$

Per il lemma precedente abbiamo che $S_N(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ $\forall z \in B_\delta(w)$, cioè $|f(z) - S_N(z)| < \varepsilon$ definitivamente $\forall z \in B_\delta(w)$, $\forall \varepsilon > 0$, da cui segue $|f(z) - f(w)| < 3\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, cioè $\lim_{z \to w} f(z) = f(w)$. Quindi f è una funzione continua.

$\square$

8.3.1 Serie di Fourier (cenni)

Definizione 8.28 (Serie di Fourier)**.** Una *serie di Fourier* è una serie della forma $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$, con a_n e b_n delle successioni.

Riduciamoci per semplicità al caso $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \sin(nx)$. Possiamo studiare la convergenza della serie con il criterio di Dirichlet se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e se a_n ha variazione limitata, è quindi sufficiente verificare che la serie $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(nx)\right|$ è limitata da una costante. Alternativamente, osserviamo che $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$, possiamo quindi scrivere

$$\sum_{n=n_0}^{N} \sin(nx) = \Im\left(\sum_{n=n_0}^{N} (e^{ix})^n\right) = \begin{cases} \Im\left(\dfrac{1 - e^{ix(N+1)}}{1 - e^{ix}}\right) & x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Studiando la convergenza assoluta abbiamo quindi

$$\sum_{n=n_0}^{N} |\sin(nx)| = \left|\Im\left(\sum_{n=n_0}^{N} (e^{ix})^n\right)\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} \qquad x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sum_{n=n_0}^{N} |\sin(nx)| = 0 \qquad x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

pertanto la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

8.4 Riordinamenti di una serie

Definizione 8.29. Una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è un riordinamento di una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ se esiste $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva tale che $b_n = a_{\sigma(n)}$.

Teorema 8.30. *Data a_n una successione a valori reali, se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente a $S \in \mathbb{R}$ allora un suo riordinamento $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge assolutamente, inoltre si ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$.*

Dimostrazione.
Sia $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva tale che $b_n = a_{\sigma(n)}$, osserviamo che esistono $N,\ M \in \mathbb{N}$ con $M \geq N$ tali che $\{a_1, \ldots, a_N\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_M\}$. Fissato $N' \geq M$, consideriamo la differenza tra le somme parziali:

$$\left|\sum_{n=n_0}^{N'} (a_n - b_n)\right| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

che è limitata in quanto $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente. Pertanto $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N'} (a_n - b_n) = 0$, cioè $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

$\square$

Teorema 8.31 (Riemann-Dini). *Data a_n una successione a valori in $\mathbb{R}$, se la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge semplicemente ma non assolutamente, allora per ogni $S \in \overline{\mathbb{R}}$ esistono un riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e una successione $b_n = a_{\sigma(n)}$ tali che $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = S$.*

Dimostrazione.
Distinguiamo due casi:

($S \in \mathbb{R}$). Siano $p_{n_0}, \dots, p_n, \dots$ i termini positivi, $q_{n_0}, \dots, q_n, \dots$ i termini strettamente negativi della serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nell'ordine in cui compaiono. Poiché la serie non è assolutamente convergente abbiamo

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} p_n = -\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n = +\infty, \text{ inoltre } \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = 0$$

in quanto la serie converge. Poniamo $b_1 = p_1$, se $b_1 > S$ poniamo $b_2 = q_1$, se $b_1 \leq S$ poniamo $b_2 = p_2$. Procedendo in modo induttivo, supponiamo di aver definito i primi m termini della serie $S^* = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ e che consistano nei termini $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_{m-k}$. Se $S_m > S$ poniamo $b_{m+1} = q_{m-k+1}$, se $S_m \leq S$ poniamo $b_{m+q} = p_{k+1}$. Poiché le serie rispettivamente dei termini positivi e negativi divergono, si ha che le somme parziali S_m non possono essere definitivamente maggiori o minori di S, pertanto tutti i termini p_i, q_i sono contenuti nella serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ che è quindi un riordinamento della serie iniziale. In particolare, per costruzione di $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ si ha che $\lim_{m\to+\infty} S_m - S = 0$, cioè $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = S$.

($S = \pm\infty$). Utilizzando le stesse notazioni, sia $M_i \in \mathbb{N}$ il minimo tale che $\sum_{n=n_0}^{M_i} p_n \geq |q_i| + 1$. Tali M_i esistono in quanto la serie dei termini positivi diverge a $+\infty$. Questo induce un riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\sigma(n_0) = p_1, \sigma(n_0 + 1) = p_2, \dots, \sigma(M_1) = p_{M_1 - n_0}, \sigma(M_1 + 1) = q_1, \sigma(M_1 + 2) = p_{M_1+1-n_0}, \dots$. Posto $b_n = a_{\sigma(n)}$ si ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = +\infty$ per costruzione. In modo analogo si tratta il caso $S = -\infty$.

□

Osservazione 8.32. Siano $S^+ = \sum_{n=n_0}^{\infty} \max\{a_n, 0\} \in [0, +\infty]$, $S^- = -\sum_{n=n_0}^{\infty} \min\{a_n, 0\} \in [0, +\infty]$.

- Se $S^+ = +\infty$ e $S^- \in \mathbb{R}$ allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = +\infty$
- Se $S^- = +\infty$ e $S^+ \in \mathbb{R}$ allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = -\infty$

e lo stesso per i loro riordinamenti.

8.5 Prodotto di due serie

Definizione 8.33 (Prodotto di Cauchy). Date $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ due serie convergenti, diciamo che la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right)$ è il *prodotto di Cauchy* delle due serie.

Teorema 8.34. *Date due successioni a_n, b_n, se le serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergono assolutamente a S_a, $S_b \in \mathbb{R}$ rispettivamente allora il loro prodotto di Cauchy converge assolutamente a $S_a \cdot S_b$.*

Dimostrazione.
Consideriamo la successione delle somme parziali del prodotto di Cauchy delle serie, abbiamo

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i+j=n}|a_ib_j|\right) \leq \left(\sum_{i=0}^{N}|a_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{N}|b_j|\right) = S_a \cdot S_b \in \mathbb{R}.$$

Pertanto il prodotto di Cauchy delle due serie converge assolutamente. Quindi a meno di riordinamento

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i+j=n}a_ib_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(a_i\sum_{j=0}^{\infty}b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty}a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_j\right) = S_a \cdot S_b.$$

□

Osservazione 8.35. L'enunciato non è valido senza l'assoluta convergenza. Tuttavia un esiste un enunciato più generale che richiede la convergenza assoluta di una delle due serie e la convergenza semplice dell'altra (Teorema di Mertens).

8.6 Produttorie

Definizione 8.36. Una *produttoria* è un prodotto formale di elementi in uno spazio vettoriale metrico V del tipo $\prod_{n=n_0}^{\infty} x_n$. Le quantità $P_N = \prod_{n=n_0}^{N} x_n$, con $N \geq n_0 > 0$, si dicono *prodotti parziali.*

In modo analogo a quanto detto per le serie, chiameremo una produttoria *convergente* se converge la successione dei suoi prodotti parziali, *divergente* se diverge, *indeterminata* o *non convergente* se non esiste tale limite. In particolare poniamo $\prod_{n=n_0}^{\infty} x_n = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=n_0}^{N} x_n$

Proposizione 8.37. *Data a_n una successione a valori in $\mathbb{R}_+$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Osserviamo che

$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_N) =$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{N} a_ia_{N-i} + \sum_{i<j<k}^{N} a_ia_ja_k + \cdots + \prod_{n=1}^{N} a_n \geq 1 + \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Passando ai limiti si ha $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pertanto se $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per il Criterio del confronto.

($\Longleftarrow$). Consideriamo $\log\left(\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\right) = \sum_{n=1}^{N}\log(1+a_n)$, poiché $\log(1+x) \leq x$ $\forall x > -1$ si ha $\sum_{n=1}^{N}\log(1+a_n) \leq \sum_{n=1}^{N} a_n$, pertanto $\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) \leq e^{S_N}$, con $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Passando ai limiti si ha che se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge per il Criterio del confronto.

□

Proposizione 8.38.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_i^{-1}}, \text{ con } p_1 < p_2 < \cdots < p_i < \dots \text{ numeri primi.}$$

Dimostrazione.

Scriviamo $n \in \mathbb{N}$ con la sua fattorizzazione in primi, $n = \prod_{i,k=1}^{N} p_{i_k}^{m_k}$ dove m_k è la molteplicità di p_{i_k} come fattore di n. Allora abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-1}}.$$

□

Osservazione 8.39 (Prodotto di Eulero)**.** Più in generale si può mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_i^{-\alpha}}$.

Capitolo 9

Calcolo differenziale

Dati $E \subseteq \mathbb{R}$ uno spazio metrico, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, cerchiamo la migliore approssimazione lineare di f in un intorno di x_0, cioè la retta tangente al grafico di f nel punto x_0. Cerchiamo quindi $y = ax + b$ tale che

$$f(x) - (a(x - x_0) + b) = o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0.$$

Ponendo $x = x_0$ otteniamo $f(x_0) = b$, pertanto

$$f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0.$$

Dividendo per $x - x_0$ e passando al limite abbiamo

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definizione 9.1 (Derivata)**.** Dati $E \subseteq \mathbb{R}$ uno spazio metrico, $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, poniamo $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ la *derivata di f in x_0*. Se tale limite esiste diciamo che f è *derivabile* (*o differenziabile*) *in* x_0.

Osservazione 9.2.

- La retta tangente al grafico di f in x_0 ha equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0, infatti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0).$$

- Sostituendo $x_0 + h = x$, $h \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 9.3 (Derivata destra e sinistra)**.** Si dicono *derivata destra* e *derivata sinistra* di f in x_0 rispettivamente

- $f'_+(x_0) = \dfrac{df}{dx^+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'_-(x_0) = \dfrac{df}{dx^-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Osservazione 9.4. f è derivabile in x_0 se e solo se esistono le derivate destra e sinistra di f in x_0 e coincidono.

9.1 Proprietà algebriche della derivata

Definizione 9.5 (Funzioni pari e dispari)**.** Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Proposizione 9.6. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, abbiamo che*

1. *se f è pari allora f' è dispari*
2. *se f è dispari allora f' è pari*

Dimostrazione.

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \lim_{-h\to 0} -\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x),$$
pertanto f' è dispari.
2. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \lim_{-h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x),$$
pertanto f' è pari.

□

Dalle proprietà algebriche del limite segue che

Proposizione 9.7. *Date f, g funzioni differenziabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, abbiamo che*

1. $(Cf)' = Cf'$ $\forall C \in \mathbb{R}$
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Proposizione 9.8 (Derivata del prodotto)**.** *Date f, g funzioni differenziabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, allora* $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Dimostrazione.
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) =$$
$$= g(x)\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + f(x)\left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

□

Proposizione 9.9. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}$, se $f(x) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è differenziabile in x e vale $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.*

Dimostrazione.
Per ogni x tale che $f(x) \neq 0$ si ha
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x+h)f(x)} = \lim_{h\to 0} -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x+h)f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

□

Proposizione 9.10 (Derivata del rapporto)**.** *Date f, g da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ differenziabili in $\mathbb{R}$, se $g(x) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è differenziabile in x e vale $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.*

Dimostrazione.
Per ogni x tale che $g(x) \neq 0$ si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

$\square$

Proposizione 9.11 (Derivata della composizione)**.** *Date f, g da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, se g è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e f è differenziabile in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è differenziabile in x_0 e vale $(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) \cdot g'(x_0)$*

Dimostrazione.
Osserviamo che $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$,
$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0))$ per $g(x) \to g(x_0)$ e che
$o(x - x_0) = o(g(x) - g(x_0))$ per $x \to x_0$, pertanto si ha

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0,$$

pertanto $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

$\square$

Proposizione 9.12 (Derivata della funzione inversa)**.** *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se f è invertibile in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, differenziabile in x_0 e $f(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è differenziabile in $f(x_0)$ e vale $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Dimostrazione.
Per ogni x in un opportuno intorno di x_0 si ha

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \lim_{f(x) \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{f(x) \to f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

f è continua in x_0 in quanto differenziabile, pertanto f^{-1} è continua in x_0 e

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

Queste proprietà sono valide anche per funzioni il cui dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

9.1.1 Derivate di funzioni elementari

- $C' = 0 \ \forall C \in \mathbb{R}$
- $(ax + b)' = \lim_{h \to 0} \frac{a(x + h) + b - ax - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{nhx^{n-1} + o(h)}{h} = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$
  $= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right) = \cos x$
- $\cos'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$
  $= \lim_{h \to 0} \left(\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\right) = -\sin x$

- $\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin'(x)\cos x - \sin x \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

- $(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x$

- $\log'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x} \cdot \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}$

- $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, con $y = \sin x$

- $\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{-1}{\sin x} = \frac{-1}{\sin(\arccos y)} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$, con $y = \cos x$

- $\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$, con $y = \tan x$

9.2 Teoremi principali

Definizione 9.13 (Punti di massimo e minimo relativi)**.** Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, diciamo che $x_0 \in A$ è un *punto di massimo relativo* di f su A se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$. Analogamente diciamo che $x_0 \in A$ è un *punto di minimo relativo* di f su A se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$.

Definizione 9.14 (Punti di massimo e minimo assoluti)**.** Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, diciamo che $x_0 \in A$ è un *punto di massimo assoluto* di f su A se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in A$. Analogamente diciamo che $x_0 \in A$ è un *punto di minimo assoluto* di f su A se $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in A$.

In generale, diremo che i punti di minimo e di massimo sono *stretti* se le relative disuguaglianze sono strette.

Teorema 9.15 (Fermat)**.** *Dati $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ punto di massimo o minimo relativo di f su A, se f è differenziabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione.
Mostriamo il teorema nel caso in cui x_0 sia un punto di minimo relativo, l'altro caso si dimostra con un ragionamento analogo.
Poiché $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ abbiamo che esiste $\delta_1 > 0$ tale che $B_{\delta_1}(x_0) \subseteq A$. Inoltre esiste $\delta \in (0, \delta_1)$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in B_\delta(x_0)$. Per $x \in B_\delta(x_0)$ consideriamo il rapporto incrementale $R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Si ha che $\lim_{x\to x_0^-} R(x) \leq 0$, $\lim_{x\to x_0^+} R(x) \geq 0$ e che i due limiti sono uguali, pertanto $\lim_{x\to x_0} R(x) = f'(x_0) = 0$.

□

Teorema 9.16 (Rolle)**.** *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e differenziabile su (a,b), se $f(a) = f(b) = \ell$ allora $\exists \xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione.
Poiché f è continua, per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo in $[a,b]$, inoltre si ha che $\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \ell \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Distinguiamo due casi:

- se $\max_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ allora $f(x) = \ell$ $\forall x \in [a,b]$, pertanto $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$

- se $\max_{x\in[a,b]} f(x) \neq \min_{x\in[a,b]} f(x)$ allora almeno uno dei due è diverso da ℓ. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\max_{x\in[a,b]} f(x) \neq \ell$. Allora esiste $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = \max_{x\in[a,b]} f(x) > \ell$, in particolare $\xi \in (a,b)$. Quindi per il Teorema di Fermat $f'(\xi) = 0$.

□

Teorema 9.17 (Darboux)**.** *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e differenziabile su $[a,b]$, se $f'(a)f'(b) < 0$ allora $\exists \xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione.
Supponiamo senza perdita di generalità che $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$. Poiché f è continua, per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo in $[a, b]$. Osserviamo che b non è un punto di minimo relativo, infatti se lo fosse si avrebbe $\dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} > 0$ in un intorno sinistro di b per il Teorema della permanenza del segno, pertanto $f(x) < f(b)$ per ogni x in tale intorno. Con un ragionamento analogo si ha che a non è un punto di minimo relativo. Allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che ξ è un punto di massimo o di minimo, pertanto $f'(\xi) = 0$ per il Teorema di Fermat.

□

Corollario 9.18. *Data $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile su $[a, b]$, $f([a, b]) = [\min\limits_{[a,b]} f, \max\limits_{[a,b]}]f$.*

Teorema 9.19 (Lagrange)**.** *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e differenziabile su (a, b), esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Dimostrazione.
Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. h è continua su $[a, b]$ e differenziabile su (a, b) perché somma di funzioni che lo sono sui rispettivi intervalli. Osserviamo che h soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle, infatti

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a), \\ h(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a), \end{aligned}$$

pertanto esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $h'(\xi) = 0$, cioè $f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Dunque $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

□

Corollario 9.20. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I e differenziabile su* $\operatorname{int}(I)$

1. *se $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in \operatorname{int}(I)$ allora f è debolmente decrescente*
2. *se $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in \operatorname{int}(I)$ allora f è debolmente crescente*
3. *se $f'(x) = 0$ $\forall x \in \operatorname{int}(I)$ allora f è costante*

Dimostrazione.

1. Consideriamo un intervallo $[a, b] \subseteq I$, per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$, pertanto $f(b) \leq f(a)$, quindi f è debolmente decrescente
2. Consideriamo un intervallo $[a, b] \subseteq I$, per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$, pertanto $f(b) \geq f(a)$, quindi f è debolmente crescente
3. Consideriamo un intervallo $[a, b] \subseteq I$, per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, pertanto $f(b) = f(a)$, quindi f è costante

□

Teorema 9.21 (Cauchy)**.** *Date f, g funzioni da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ continue su $[a, b]$ e differenziabili su (a, b), esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$*

Dimostrazione.
Consideriamo la funzione $h(x) = (f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$, h è continua su $[a,b]$ e differenziabile su (a,b). Osserviamo che h soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle, infatti

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$
$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$

pertanto esiste $\xi \in (a,b)$ tale che $h'(\xi) = 0$, cioè $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$.

□

Osservazione 9.22. Ponendo $g(x) = x$ si ha il Teorema di Lagrange.

9.2.1 Derivate successive

Definizione 9.23 (Derivata n-esima)**.** Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile n volte su I, poniamo $\dfrac{d^n f}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) = f^{(n)}$ la *derivata n-esima di f*.

Proposizione 9.24. *Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, derivabile due volte in $x_0 \in A$,*

1. *se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo stretto*
2. *se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo stretto*
3. *se x_0 è un punto di minimo relativo allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$*
4. *se x_0 è un punto di massimo relativo allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$*

Dimostrazione.

1. Poiché $f'(x_0) = 0$ si ha

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Per il Teorema della permanenza del segno esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \; \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Allora si ha $\begin{cases} f'(x) > 0 & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \\ f'(x) < 0 & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \end{cases}$, cioè f è strettamente crescente su $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ e strettamente decrescente su $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, cioè x_0 è un punto di minimo relativo stretto.

2. Si dimostra in modo analogo al punto precedente.
3. Se x_0 è un punto di minimo relativo allora $f'(x_0) = 0$ per il Teorema di Fermat. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0) \; \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Per il Teorema di Lagrange, per ogni $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ in quanto $x > x_0$ e x_0 è un punto di minimo relativo. Pertanto $f''(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{\xi - x_0} \geq 0$.
4. Si dimostra in modo analogo al punto precedente.

□

Definizione 9.25. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme aperto poniamo

$$C^n(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ è differenziabile } n \text{ volte su } A \text{ e } f^{(n)}\text{è continua.}\}$$

Osservazione 9.26. $C^n(A)$ è uno spazio vettoriale sul quale può essere definita la norma $\|f\|_{C^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \max_{x \in A} f^{(k)}(x)$.

9.2.2 Funzioni convesse e concave

Definizione 9.27 (Funzione convessa e concava)**.** Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se $\forall x,\, y,\, z \in I$ tali che $x < y < z$ si ha $f(y) \leq f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$. f si dice *concava* se $-f$ è convessa.

Osservazione 9.28. Equivalentemente possiamo dire che f è convessa se esiste $\lambda \in [0,1]$ tale che $y = \lambda x + (1-\lambda)z$, da cui $f(y) = f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$. L'equazione $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ è detta *combinazione convessa di x e z*.

Proposizione 9.29. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su I, f è convessa se e solo se f' è crescente.*

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Per ogni $x,\, y,\, z \in I$ tali che $x < y < z$ consideriamo i rapporti incrementali di f:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Per $y \to x$ si ha

$$f'(x) \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

per $y \to z$ si ha

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq f'(z),$$

pertanto f' è crescente.

($\Longleftarrow$). (Dimostrazione da correggere)Supponiamo per assurdo che f non sia convessa, cioè esistono x, y, $z \in I$ con $x < y < z$ tali che $f(y) > f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$, in particolare $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$. Per il Teorema di Lagrange esistono $\nu \in (x,y)$, $\xi \in (y,z)$ tali che $f'(\nu) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$, $f'(\xi) = \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Poiché $\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} > \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ si ha che $f'(\nu) \leq f'(\xi)$, ma questo è assurdo in quanto f' è crescente, quindi f è convessa.

($\Longleftarrow$) Fissiamo $x, x_0 \in I$ tali che $x > x_0$, per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Dalla crescenza di f' si ha

$$(x-x_0)f'(\xi) > (x-x_0)f'(x_0),$$

da cui si ricava

$$f(x) - f(x_0) > (x-x_0)f'(x_0),$$

quindi la funzione è convessa. Un ragionamento analogo è valido per $x < x_0$.

□

Corollario 9.30. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte su I, f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$.*

Corollario 9.31. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte in $x_0 \in I$, se f è convessa in un intorno di x_0 allora $f''(x_0) \geq 0$. Analogamente se f è concava in un intorno di x_0 allora $f''(x_0) \leq 0$.*

Osservazione 9.32. Il segno di f'' definisce gli intervalli di convessità e concavità di f.

Definizione 9.33 (Punto di flesso)**.** Dati $x_0 \in \mathbb{R}$, f una funzione definita su un intorno $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ di x_0, $\varepsilon > 0$, diciamo che f *cambia concavità* in x_0 se f è convessa in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ e concava in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ o viceversa. In tal caso diciamo che x_0 è un *punto di flesso per f*.

Definizione 9.34 (Punto di flesso a tangente verticale)**.** Dati $x_0 \in \mathbb{R}$, f una funzione definita su un intorno $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ di x_0, $\varepsilon > 0$, continua su x_0, se f cambia concavità in x_0 e $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ diciamo che x_0 è un *punto di flesso a tangente verticale.*

Proposizione 9.35. *Data $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, allora*

1. *per ogni $x \in (a, b)$ esistono $\dfrac{df}{dx^-}(x)$, $\dfrac{df}{dx^+}(x)$ e vale $\dfrac{df}{dx^-}(x) \leq \dfrac{df}{dx^+}(x)$*
2. *f è continua su (a, b)*
3. *per ogni x, $y \in (a, b)$ tali che $x \leq y$ si ha $\dfrac{df}{dx^\pm}(x) \leq \dfrac{df}{dx^\pm}(y)$*
4. $\operatorname{disc}\left(\dfrac{df}{dx^-}\right) = \operatorname{disc}\left(\dfrac{df}{dx^+}\right)$*, quindi f è differenziabile su $(a, b) \setminus \operatorname{disc}\left(\dfrac{df}{dx^\pm}\right)$*

Dimostrazione.

1. Per ogni x, y, $z \in (a, b)$ tali che $x < y < z$, consideriamo i rapporti incrementali
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$
Osserviamo che, fissato y, $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ è monotono crescente in x e $\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ è monotono crescente in z in quanto f è una funzione convessa. Per $x \to y$ e $z \to y$ si ha $\dfrac{df}{dx^-}(y) \leq \dfrac{df}{dx^+}(y)$
2. Fissato $x_0 \in (a, b)$, mostriamo che f è continua in x_0, cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{df}{dx^-}(x_0)(x-x_0) = 0.$$
Ragionando in modo analogo per il limite destro si ha che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0,$$
cioè f è continua in x_0 per ogni $x_0 \in (a, b)$.
3. Dalla convessità di f si ha $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Passando ai limiti per $y \to x$ e $y \to z$ si ha $\dfrac{df}{dx^+}(x) \leq \dfrac{df}{dz^-}(z)$ da cui la tesi.
4. Per la monotonia dei rapporti incrementali si ha che $\operatorname{disc}\left(\dfrac{df}{dx^\pm}\right)$ è un insieme numerabile. Per ogni $y \in (a, b) \setminus \operatorname{disc}\left(\dfrac{df}{dx^\pm}\right)$, x, $z \in (a, b)$ tali che $x \leq y \leq z$, si ha
$$\frac{df}{dx^+}(x) \leq \frac{df}{dx^-}(y) \leq \frac{df}{dx^+}(y) \leq \frac{df}{dx^+}(z).$$
Per $x \to y$ e $y \to z$ allora
$$\frac{df}{dx^-}(y) = \frac{df}{dx^+}(y)$$
per il Teorema dei due carabinieri, pertanto f è differenziabile in y.

□

Osservazione 9.36. Le discontinuità di f' corrispondono ai punti angolosi di f.

9.3 Teorema di de l'Hôpital

Teorema 9.37 (de l'Hôpital, forma $\frac{0}{0}$)**.** *Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e I un intorno di x_0, f, g funzioni continue su I e derivabili su $I \setminus \{x_0\}$ tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, se esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

Dimostrazione.
Osserviamo che $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$. Infatti supponiamo che esista $x_1 \in I \setminus \{x_0\}$ tale che $g(x_1) = 0 = g(x_0)$, allora per il Teorema di Rolle esiste ξ tra x_0 e x_1 tale che $g'(\xi) = 0$, che è assurdo. Poiché $f(x_0) = g(x_0) = 0$ possiamo scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Per il Teorema di Cauchy esiste ξ compreso tra x_0 e x tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si ha $\xi \to x_0$, pertanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \ell.$$

□

Teorema 9.38 (de l'Hôpital, forma $\frac{0}{0}$, limite all'infinito)**.** *Dati I un intorno di $+\infty$, f, g funzioni continue e derivabili su I tali che $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, se esiste $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

Dimostrazione. Poniamo $\overline{f}(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $\overline{g}(t) = g\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $I = (a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. Abbiamo che $\overline{f}$ e $\overline{g}$ sono continue su $\left(0, \dfrac{1}{a}\right)$ (con la convenzione che $\dfrac{1}{0} = +\infty$) e vale

$$\lim_{t \to 0^+} \overline{f}(t) = \lim_{t \to 0^+} \overline{g}(t) = 0.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\overline{f}'(t)}{\overline{g}'(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Poiché tale limite esiste, per il teorema precedente si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

□

Osservazione 9.39. Il risultato è valido anche per il limite a $-\infty$.

Teorema 9.40 (de l'Hôpital, forma $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Dati $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intorno di x_0, f, g funzioni continue e derivabili su $I \setminus \{x_0\}$ tali che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, se esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

Dimostrazione.
Distinguiamo due casi.

($\ell \in \mathbb{R}$). Mostriamo che $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Per la definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\ell - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \ell + \varepsilon \; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Osserviamo che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0+\delta)}{g(x) - g(x_0+\delta)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0+\delta)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0+\delta)}{g(x)} =$$
$$= \frac{f(x) - f(x_0+\delta)}{g(x) - g(x_0+\delta)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_0+\delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta)}{f(x)}} = \frac{f(x) - f(x_0+\delta)}{g(x) - g(x_0+\delta)} \cdot (1 + o(1)) \text{ per } x \to x_0^+.$$

Fissato $x \in (x_0, x_0+\delta)$, per il Teorema di Cauchy esiste $\xi \in (x, x_0 + \delta)$ tale che $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(x_0+\delta)}{g(x) - g(x_0+\delta)}$. Consideriamo adesso i limiti superiori e inferiori:

$$\limsup_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{\xi\to x_0^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq \ell + \varepsilon,$$
$$\liminf_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \liminf_{\xi\to x_0^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq \ell - \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha quindi che esiste

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

In modo analogo si mostra che il limite sinistro vale ℓ, da cui la tesi.

($\ell = \pm\infty$). Senza perdita di generalità supponiamo che $\ell = +\infty$, mostriamo che $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. Per la definizione di limite, per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\frac{f'(x)}{g'(x)} > M \; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ragionando come prima, fissato $x \in (x_0, x_0+\delta)$, per il Teorema di Cauchy esiste $\xi \in (x, x_0+\delta)$ tale che $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(x_0+\delta)}{g(x) - g(x_0+\delta)} > M$. Per $x \to x_0^+$ si ha $\xi \to x_0^+$, pertanto

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0+\delta)}{g(x) - g(x_0+\delta)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} > M.$$

In modo analogo si dimostra che

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

da cui segue la tesi per l'arbitrarietà di M.

□

9.4 Polinomi di Taylor

I polinomi di Taylor rispondono al problema dell'approssimazione di una funzione f regolare con un polinomio in un intorno di un punto x_0 del suo dominio. Cerchiamo quindi dei polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $f(x) = p(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$, dove n è il grado del polinomio.

Osservazione 9.41.

- Tale polinomio potrebbe non esistere

- Se tale polinomio esiste allora è unico. Infatti, supponiamo per assurdo che esistano $p(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ entrambi di grado n tali che $p(x) - q(x) = o((x - x_0))^n$, $p(x) \neq q(x)$. Osserviamo che $h(x) = p(x) - q(x)$ ha al più grado $n - 1$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x - x_0)^n} = +\infty$ in quanto $\deg h < \deg (x - x_0)^n$, ma questo è assurdo poiché $h(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$

Definizione 9.42 (Polinomio di Taylor)**.** Dati $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile n volte in $x_0 \in A$, il polinomio $T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ si dice *polinomio di Taylor di grado n di f in* x_0. Se chiaro dal contesto scriveremo generalmente $T_n(x)$ al posto di $T_n(f, x_0)(x)$.

Osservazione 9.43. $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\ \forall k \leq n$

Teorema 9.44 (Peano)**.** *Data f una funzione differenziabile n volte in un punto x_0 del suo dominio, allora $f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$.*

Dimostrazione.
Consideriamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n}$. Applicando il Teorema di de l'Hôpital $n - 1$ volte si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!\ (x - x_0)} = \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \frac{1}{n!} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \right) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.
\end{aligned}$$

Pertanto $f(x) - T_n(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$.

□

La quantità $o((x - x_0)^n)$ è detta *resto di Peano.*

Corollario 9.45. *Data $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenziabile n volte in $x_0 \in (a, b)$, se $f^{(k)}(x_0) = 0\ \forall 1 \leq k \leq n-1$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$:*

1. *se n è dispari allora f è strettamente monotona in un intorno di x_0*
2. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo stretto*
3. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo stretto*

Dimostrazione.
Dalle ipotesi sulle derivate di f si ha che $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$.

1. Consideriamo la derivata di f in un intorno di x_0:

$$f'(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}.$$

   Poiché $n - 1$ è pari si ha che $\operatorname{sgn}(f') = \operatorname{sgn}(f^{(n)}(x_0))$, pertanto f è strettamente monotona in un intorno di x_0.

2. Osserviamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|o((x - x_0)^n)| < \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!}(x - x_0)^n\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, pertanto x_0 è un punto di minimo relativo stretto
3. La dimostrazione è analoga al punto precedente

□

Osservazione 9.46.

- I polinomi di Taylor sono operatori lineari, infatti $T_n(af + bg, x_0) = aT_n(f, x_0) + bT_n(g, x_0)\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

- $T_{n-1}(f', x_0) = T'_n(f, x_0)$

Lemma 9.47. *Data $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile $n+1$ volte su (a, b), se $g^{(k)}(a) = g(b) = 0$ $\forall 0 \le k \le n$ allora esiste $t \in (a, b)$ tale che $g^{(n+1)}(t) = 0$.*

Dimostrazione.
Poniamo $b = t_0$, per il Teorema di Rolle esiste $t_1 \in (a, t_0)$ tale che $g'(t_1) = 0$. Reiterando $n - 1$ volte si ha che esiste $t \in (a, t_n)$ tale che $g^{(n+1)}(t) = 0$.

□

Teorema 9.48 (Lagrange)**.** *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile $n+1$ volte su un intorno di $x_0 \in I$, allora $f(x) = T_n(f, x_0)(x) + f^{(n+1)}(t)\dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$ con t compreso tra x e x_0.*

Dimostrazione.
Senza perdita di generalità fissiamo $x > x_0$, consideriamo la funzione

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}(t - x_0)^{n+1}$$

nell'intervallo (x_0, x). Osserviamo che

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \ \forall 1 \le k \le n, \ g(x) = 0,$$

pertanto per il lemma precedente esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, cioè

$$f^{(n+1)}(\xi) = (n + 1)! \ \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}.$$

Allora si ha

$$f(x) = T_n(x) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

□

La quantità $f^{(n+1)}(t)\dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$ è detta *resto di Lagrange*.

9.4.1 Polinomi di Taylor di funzioni elementari

Le seguenti espansioni saranno tutte intorno al punto $x_0 = 0$.

- $f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = e^x$ e $f^{(k)}(0) = 1$.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

- $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1 - x)^{k+1}}$ e $f^{(k)}(0) = k!$.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

- $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1 + x)^{k+1}}$ e $f^{(k)}(0) = (-1)^k k!$.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

- $f(x) = \log(1 + x)$. Osserviamo che $\log'(1 + x) = \dfrac{1}{1 + x}$, abbiamo quindi $T'_{n+1}(f, x_0)(x) = T_n(f', x_0)(x)$, da cui

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k + 1}$$

- $f(x) = \sin x$. Osserviamo che $f^{(2k)}(0) = \pm \sin 0 = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = \pm \cos 0 = \pm 1$, da cui
$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
- Con un ragionamento analogo, per $f(x) = \cos x$ abbiamo
$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Sostituendo $-x^2$ nel polinomio di Taylor di $\dfrac{1}{1-x}$abbiamo
$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$$
- $f(x) = \arctan x$. Osserviamo che $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$, abbiamo quindi $T'_{n+1}(f, x_0)(x) = T_n(f', x_0)(x)$, da cui
$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$
- $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$. Scrivendo il coefficiente binomiale come $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ abbiamo
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Proposizione 9.49.
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione.
Per il Teorema di Lagrange abbiamo che $e^x - T_n(x) = e^t \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ con $|t| < |x|$, in particolare $|e^x - T_n(x)| \leq e^{|t|} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Poiché $\lim_{n \to +\infty} e^{|t|} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ si ha che $\lim_{n \to \infty} e^x - T_n(x) = 0$, cioè
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
□

Osservazione 9.50. Non è sempre vero che $\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = f(x)$. Consideriamo ad esempio la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$
f è C^∞ in un intorno di 0 e le sue derivate in 0 sono tutte nulle, pertanto si ha che $T_n(f, 0)(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in particolare la successione dei polinomi non converge a f.

9.4.2 Serie di Taylor e funzioni analitiche

Definizione 9.51 (Serie di Taylor)**.** Data $f \in C^\infty$ in un punto x_0 del suo dominio, la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$
si dice *serie di Taylor di f in x_0*.

Definizione 9.52 (Funzione analitica)**.** Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme aperto, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *analitica su* A se $f \in C^\infty(A)$ e $\forall x_0 \in A$ esiste $r > 0$ tale che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$.

Possiamo utilizzare lo stesso ragionamento con cui abbiamo mostrato che e^x coincide con la sua serie di Taylor per verificare che

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

e che $\log(1+x)$, $\arctan x$, $\frac{1}{1+x^2}$ coincidono con le loro serie di Taylor in 0 per $|x| < 1$.

Proposizione 9.53 (Identità di Eulero)**.**

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

Dimostrazione.
Consideriamo le serie di Taylor di $\cos x$ e $\sin x$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Sostituendo $-1 = i^2$ abbiamo

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} = e^{ix}. \end{aligned}$$

□

Proposizione 9.54. *Data a_n una successione a valori in $\mathbb{R}$, $f : B_R(x_0) \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, dove R è il raggio di convergenza della serie, $x_0 \in \mathbb{R}$, allora $f \in C^\infty(B_R(x_0))$ e $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.*

Dimostrazione.
Per convergenza uniforme si dimostra che $\frac{df}{dx}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx}(x-x_0)^n$. Poiché i termini della somma sono differenziabili infinite volte si ha che $f(x) \in C^\infty(B_R(x_0))$. Osserviamo che

$$\frac{d^k f}{x^k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^k}{x^k}(x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!}(x-x_0)^{n-k}.$$

Valutando in x_0 si ha $f^{(k)}(x_0) = a_n k!$, cioè $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

□

Lemma 9.55.

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \ \forall x \in (-1, 1)$$

Dimostrazione.
Osserviamo che per $k = 0$ si ha la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ per $x \in (-1, 1)$. Derivando k volte otteniamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

□

Proposizione 9.56. *Data a_n una successione a valori in $\mathbb{R}$, $f : B_R(x_0) \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, dove R è il raggio di convergenza della serie, $x_0 \in \mathbb{R}$, allora f è analitica su $B_R(x_0)$, cioè $\forall x_1 \in B_R(x_0)$ $\exists r > 0$ tale che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n$ $\forall x \in B_r(x_1)$.*

Dimostrazione.
Fissiamo $x_1 \in B_R(x_0)$ e calcoliamo da derivata k-esima di f in x_1:

$$f^{(k)}(x_1) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!}(x_1 - x_0)^{n-k}.$$

Poiché $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R}$ si ha che esiste $C \in \mathbb{R}$, $r \in (0, R)$ tali che $|a_n| \leq \frac{C}{r^n}$. Scegliendo $r \in (|x_0 - x_1|, R)$ si ha

$$|f^{(k)}(x)| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C}{r^n} \cdot \frac{n!}{(n-k)!}|x_1 - x_0|^{n-k} = \frac{C}{r^k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{|x_1 - x_0|}{r}\right)^{n-k}.$$

Per il lemma precedente quindi

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{C}{r^n} \cdot \frac{k!}{\left(1 - \frac{|x_1 - x_0|}{r}\right)^{k+1}} = Cr \cdot \frac{k!}{(r - |x_1 - x_0|)^{k+1}} = \frac{Cr}{r - |x_1 - x_0|} \cdot \frac{k!}{(r - |x_1 - x_0|)^k}.$$

Ponendo $C' = \frac{Cr}{r - |x_1 - x_0|}$ si ha

$$\left|\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right| \leq \frac{C'}{(r - |x_1 - x_0|)^k},$$

pertanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$ converge se $|x - x_0| < r - |x_1 - x_1|$, in particolare converge nell'intervallo $(x_1 - R + |x_1 - x_0|, x_1 + R - |x_1 - x_0|)$.
Sia $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$, verifichiamo che $g(x) = f(x)$ $\forall x \in B_R(x_0)$. Sia $S_n(x)$ la successione delle somme parziali di g, osserviamo che $S_n(x) = T_n(f, x_0)(x)$, quindi per il Teorema di Lagrange abbiamo

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}|x - x_1|^{n+1} \text{ con } y \text{ compreso tra } x \text{ e } x_1,$$

da cui

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{C \cdot |x - x_1|^{n+1}}{(r - |y - x_1|)^{n+1}}.$$

Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{C \cdot |x - x_1|^{n+1}}{(r - |y - x_1|)^{n+1}} 0$ per $|x - x_1| < r - |y - x_1|$, da cui la tesi.

□

Corollario 9.57. *Date f, g funzioni analitiche su un intervallo (a, b), $x_0 \in (a, b)$, se $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ allora $f = g$ su (a, b).*

Dimostrazione.
Consideriamo l'insieme $A = \{x \in (a, b) \mid f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)\ \forall k \in \mathbb{N}\}$, per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $(x - r, x + r) \subseteq A$ e $g = f$ su $(x - r, x + r)$, pertanto A è un insieme aperto in (a, b). D'altra parte per ogni successione x_n a valori in A tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \in (a, b)$, per la continuità di f, g abbiamo che $x \in A$, pertanto A è un insieme chiuso in (a, b). Poiché $A \neq \emptyset$ e (a, b) è connesso abbiamo che $A = (a, b)$, pertanto $f = g$ su (a, b).

□

Osservazione 9.58. Le funzioni analitiche formano uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Corollario 9.59. *Date f, g funzioni analitiche su un intervallo (a, b), x_n una successione a valori in (a, b) convergente in $x_0 \in (a, b)$, se $f(x_n) = g(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $f = g$ su (a, b).*

Dimostrazione.
Osserviamo che se f e g sono funzioni analitiche allora $af + bg$ è una funzione analitica $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$, $h(x_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Per il Teorema di Rolle esiste x'_n compreso tra x_0 e x_n tale che $h'(x'_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, passando al limite si ha che $h'(x_0) = 0$. Reiterando otteniamo che $h^{(k)}(x_0) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, pertanto $h = 0$ su (a, b) per il corollario precedente, cioè $f = g$ su (a, b).

□

Teorema 9.60. *Date f, g funzioni analitiche su un intervallo (a, b), abbiamo che:*

1. *$f \cdot g$ è una funzione analitica*
2. *se $g \neq 0$ allora $\dfrac{f}{g}$ è una funzione analitica*
3. *se $f : (a, b) \to (c, d)$ e $g : (c, d) \to (e, f)$ allora $g \circ f$ è una funzione analitica*
4. *se $f \neq 0$ allora f^{-1} è una funzione analitica*

Proposizione 9.61. *Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione analitica se e solo se $f \in C^\infty(I)$ e per ogni $x_0 \in I$ esistono $r > 0$, $C > 0$, $R > 0$ tali che $\left|\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}\right| \leq CR^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.*

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Abbiamo già visto che le serie di Taylor su I appartengono a $C^\infty(I)$, inoltre poiché la serie di Taylor di f converge per ogni $x_0 \in I$ si ha la tesi.

($\Longleftarrow$). Per ogni $x_0 \in (a, b)$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(x_0)|}{n!}|x - x_0|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} CR^n \cdot |x - x_0|^n,$$

pertanto la serie converge se $R^n \cdot |x - x_0| < 1$, cioè $|x - x_0| < \dfrac{1}{R}$. In particolare la serie converge in $J = ((x_0 - 1/R, x_0 + 1/R) \cap (x_0 - r, x_0 + r))$. Consideriamo la funzione $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$, verifichiamo che $f(x) = g(x)$ su un intorno $(x - r_1, x + r_1) \subseteq J$. Posta $S_n(x)$ la successione delle somme parziali di g, osserviamo che $S_n(x) = T_n(f, x_0)(x)$, quindi per il Teorema di Lagrange abbiamo

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!}|x - x_1|^{n+1} \text{ con } y \text{ compreso tra } x \text{ e } x_1,$$

da cui

$$|f(x) - S_n(x)| \leq C(Rr_1)^{n+1}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} C(Rr_1)^{n+1} = 0$ ha che f è analitica in un intorno di x_0, da cui la tesi per l'arbitrarietà di x_0.

□

Definizione 9.62 (Prolungamento analitico)**.** Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione analitica su I. Definiamo l'unione tra due funzioni $h_1 : J_1 \to \mathbb{R}$, $h_2 : J_2 \to \mathbb{R}$, con J_1 e J_2 intervalli, come $(h_1 \cup h_2)(x) = \begin{cases} h_1(x) & x \in J_1 \\ h_2(x) & x \in J_2 \end{cases}$. Diciamo allora che

$$g = \bigcup\{h : J \to \mathbb{R} \text{ analitica } \mid J \text{ intervallo}, I \subseteq J, h|_I = f\}$$

è il *prolungamento analitico di f*.

Capitolo 10

Integrale di Riemann

10.1 Definizione

Definizione 10.1 (Suddivisione, partizione)**.** Dato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, chiamiamo $\pi = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$, con $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, una *suddivisione* di $[a,b]$. Una suddivisione induce una *partizione* di $[a,b]$ come $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$, con $I_k = [t_{k-1}, t_k]$. Generalmente useremo in modo equivalente i due termini. Inoltre indichiamo con $|I_k|$ la quantità $t_k - t_{k-1}$.

Definizione 10.2 (Finezza di una suddivisione)**.** Date π_1, π_2 suddivisioni di un intervallo $[a,b]$, diciamo che π_1 è una suddivisione più *fine* di π_2 se $\pi_2 \subset \pi_1$.

Osservazione 10.3.

- La relazione di finezza è una relazione d'ordine parziale sulle suddivisioni di uno stesso intervallo
- Date due suddivisioni distinte π_1, π_2 di uno stesso intervallo, si ha sempre almeno una suddivisione che raffina entrambe, ad esempio $\pi_1 \cup \pi_2$
- La suddivisione $\pi = \{a,b\}$ è la suddivisione meno fine di $[a,b]$

Definizione 10.4 (Somma superiore)**.** Date $\pi = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ una suddivisione di un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, poniamo

$$S(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sup_{[t_{k-1},t_k]} f = \sum_{k=1}^{n} |I_k| M_k$$

la *somma superiore di f rispetto a π*, dove $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ e $M_k = \sup_{[t_{k-1},t_k]} f$.

Definizione 10.5 (Somma inferiore)**.** Date $\pi = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ una suddivisione di un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, poniamo

$$s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \inf_{[t_{k-1},t_k]} f = \sum_{k=1}^{n} |I_k| m_k$$

la *somma inferiore di f rispetto a π*, dove $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ e $m_k = \inf_{[t_{k-1},t_k]} f$.

Osservazione 10.6. $S(f,\pi) \geq s(f,\pi)$.

Proposizione 10.7. *Date $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, π_1, π_2 suddivisioni distinte di $[a,b]$, se $\pi_1 \subset \pi_2$ allora $S(f,\pi_2) \leq S(f,\pi_1)$ e $s(f,\pi_2) \geq s(f,\pi_1)$.*

Dimostrazione.
Sia $\pi_1 = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$, senza perdita di generalità possiamo supporre $\pi_2 = \pi_1 \cup \{t'\}$ con

$t_{k_0-1} \le t' \le t_{k_0}$ per $k_0 \in \{1, \dots, n\}$. Siano $I' = [t_{k_0-1}, t']$, $I'' = [t', t_{k_0}]$, consideriamo la differenza tra le somme superiori $S(f, \pi_1) - S(f, \pi_2)$. Posti $I_k = [t_{k-1}, t_k]$, $M_k = \sup\limits_{[t_{k-1}, t_k]} f$ abbiamo

$$S(f, \pi_1) - S(f, \pi_2) = |I_{k_0}| M_{k_0} - (|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f).$$

Osserviamo che $|I'| \sup\limits_{I'} f \le |I'| M_{k_0}$ e $|I''| \sup\limits_{I''} f \le |I''| M_{k_0}$, pertanto $|I'| \sup\limits_{I'} f + |I''| \sup\limits_{I''} f \le |I_{k_0}| M_{k_0}$. Abbiamo quindi $S(f, \pi_1) - S(f, \pi_2) \ge 0$. Con un ragionamento analogo si mostra che $s(f, \pi_2) - s(f, \pi_1) \ge 0$.

□

Teorema 10.8. *Date $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, π_1, π_2 suddivisioni distinte di $[a, b]$, allora $S(f, \pi_1) \ge s(f, \pi_2)$.*

Dimostrazione.
Consideriamo la suddivisione $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, per quanto già visto abbiamo
$S(f, \pi_1) \ge S(f, \pi)$. D'altra parte $S(f, \pi)) \ge s(f, \pi)$ e $s(f, \pi) \ge s(f, \pi_2)$, pertanto $S(f, \pi_1) \ge s(f, \pi_2)$.

□

Definizione 10.9 (Integrale superiore)**.** Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, chiamiamo *integrale superiore di f* la quantità

$$S(f) = \inf\{S(f, \pi) \mid \pi \text{ è una suddivisione finita di } [a, b]\}.$$

Definizione 10.10 (Integrale inferiore)**.** Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, chiamiamo *integrale inferiore di f* la quantità

$$s(f) = \sup\{s(f, \pi) \mid \pi \text{ è una suddivisione finita di } [a, b]\}.$$

Proposizione 10.11. *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, allora $S(f) \ge s(f)$.*

Dimostrazione.
Sia π_1 una suddivisione finita di $[a, b]$, abbiamo che $S(f, \pi_1)$ è un maggiorante per l'insieme

$$A = \{s(f, \pi) \mid \pi \text{ è una partizione finita di } [a, b]\}.$$

In particolare abbiamo che $S(f, \pi_1) \ge s(f) = \sup A$ per ogni partizione π_1 finita di $[a, b]$, cioè $s(f)$ è un minorante per l'insieme

$$B = \{S(f, \pi) \mid \pi \text{ è una partizione finita di } [a, b]\},$$

pertanto $s(f) \le S(f) = \inf B$.

□

Definizione 10.12 (Integrabilità secondo Riemann)**.** Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice *integrabile secondo Riemann* se $S(f) = s(f)$. Tale valore viene indicato con $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Osservazione 10.13. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile allora

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x)dx \le (b - a) \sup_{[a,b]} f$$

Proposizione 10.14. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione π finita di $[a, b]$ tale che $0 \le S(f, \pi) - s(f, \pi) \le \varepsilon$.*

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Per la definizione di integrale superiore, fissato $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione π_1 finita di $[a, b]$ tale che $S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, \pi_1)$. Analogamente esiste una partizione π_2 finita di $[a, b]$ tale che $s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \pi_2)$. Consideriamo la suddivisione $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, abbiamo

$$S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, \pi_1) \ge S(f, \pi),$$
$$s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \pi_2) \le s(f, \pi),$$

pertanto $0 \le S(f, \pi) - s(f, \pi) < \varepsilon$.

($\Longleftarrow$). Fissato $\varepsilon > 0$ esiste una partizione π finita di $[a,b]$ tale che $0 \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$, pertanto $S(f) - s(f) = 0$, cioè f è integrabile.

□

Proposizione 10.15. *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona, allora f è integrabile.*

Dimostrazione.
Senza perdita di generalità possiamo supporre che f sia crescente. Allora $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ $\forall x \in [a,b]$, pertanto f è limitata. Sia $\pi_n = \left\{ t_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n} \mid 0 \leq k \leq n \right\}$ una partizione uniforme di $[a,b]$, poiché f è crescente si ha $S(f,\pi_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_k)$, $s(f,\pi_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_{k-1})$. Pertanto
$S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(t_k) - f(t_{k-1}) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$ e $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) = 0$, cioè f è integrabile.

□

Proposizione 10.16. *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ lipschitziana, allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Poiché f è lipschitziana è anche continua, pertanto per il Teorema di Weierstrass è limitata. Consideriamo una suddivisione π finita di $[a,b]$, I_k gli intervalli indotti da π per $1 \leq k \leq n$ e poniamo $\delta = \max\{|I_k| : 1 \leq k \leq n\}$ il parametro di finezza della partizione. Poiché f è limitata osserviamo che $\sup_{I_k} f = \max_{I_k} f$ e $\inf_{I_k} f = \min_{I_k} f$, pertanto $S(f,\pi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |I_k| \max_{I_k} f$, $s(f,\pi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |I_k| \min_{I_k} f$. Siano ξ_k, ν_k rispettivamente i punti di massimo e di minimo di f su I_k, abbiamo che $|\xi_k - \nu_k| \leq |I_k| \leq \delta$. Allora

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|(f(\xi_k) - f(\nu_k)).$$

Poiché f è lipschitziana esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ $\forall x, y \in [a,b]$, pertanto

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \sum_{k=1}^{n} C|I_k| \cdot |\xi_k - \nu_k| \leq \sum_{k=0}^{n} C\delta|I_k| = C\delta(b-a).$$

Raffinando la partizione si ha che $\delta \to 0$, pertanto $S(f,\pi) - s(f,\pi) \to 0$, cioè f è integrabile.

□

10.2 Continuità uniforme

Definizione 10.17 (Continuità uniforme)**.** Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *uniformemente continua* se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x, y \in I$ con $|x-y| < \delta$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Osservazione 10.18. Se f è uniformemente continua allora è continua.

Teorema 10.19 (Heine-Cantor)**.** *Dati $C \subseteq \mathbb{R}$ compatto, $f : C \to \mathbb{R}$, se f è continua su C allora è uniformemente continua.*

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$, esistano $x, y \in C$ tali che $|x-y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Scegliamo in particolare $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, siano $x_n, y_n \in C$ tali che $|x_n - y_n| < \delta_n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Inoltre per la compattezza di C esistono due sottosuccessioni x_{n_k}, y_{n_k} convergenti rispettivamente a $x, y \in C$. Poiché $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |x_n - y_n| = 0$ si ha $x = y$, pertanto

$$\varepsilon < \lim_{k \to +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x) - f(y)| = 0,$$

che è assurdo. Quindi f è uniformemente continua.

□

Proposizione 10.20. *Data* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = m$ *con* ℓ, $m \in \mathbb{R}$ *allora* f *è uniformemente continua.*

Dimostrazione.
Per la definizione di limite per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R_+ > 0$ tale che $|f(x)-\ell| < \varepsilon/2$ $\forall x > R_+$. Analogamente esiste $R_- > 0$ tale che $|f(x) - m| < \varepsilon/2$ $\forall x < -R_-$. Sia $R = \max\{R_+, R_-\}$, fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta \in (0, 1)$ la costante garantita dalla continuità uniforme di f sull'intervallo $[-R-1, R+1]$. Per ogni x, $y \in \mathbb{R}$ tali che $|x - y| < \delta$ abbiamo tre possibilità:

- se x, $y > R$ allora $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \varepsilon$
- se x, $y < -R$ allora $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \varepsilon$
- se almeno uno appartiene a $[-R, R]$, senza perdita di generalità supponiamo $x \in [-R, R]$, abbiamo $|x - y| < \delta < 1$, cioè x, $y \in [-R - 1, R + 1]$. Allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per la continuità uniforme di f su $[-R - 1, R + 1]$

Pertanto f è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

□

Proposizione 10.21. *La somma di due funzioni uniformemente continue è una funzione uniformemente continua.*

Dimostrazione.
Siano f, g funzioni uniformemente continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ (possibilmente $I = \mathbb{R}$), siano ε', δ', ε'', δ'' le costanti garantite dalla continuità uniforme rispettivamente di f e di g. Poniamo $\varepsilon = \max\{\varepsilon', \varepsilon''\}$, $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Per ogni x, $y \in I$ tale che $|x - y| < \delta$ abbiamo

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) + g(y)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \varepsilon' + \varepsilon'' < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

pertanto $f + g$ è uniformemente continua.

□

Corollario 10.22. *Date* $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione uniformemente continua e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, se* $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - f_0(x)) = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - f_0(x)) = 0$ *allora* f *è uniformemente continua.*

Dimostrazione.
Osserviamo che $f - f_0$ è uniformemente continua in quanto somma di funzioni uniformemente continue. Allora abbiamo che $f = f_0 + (f - f_0)$ è uniformemente continua.

□

Proposizione 10.23. *Dati* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo,* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione lipschitziana, allora* f *è uniformemente continua.*

Dimostrazione.
Sia $L \in \mathbb{R}$ la costante di Lipschitz per f, fissiamo $\varepsilon > 0$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$. Consideriamo x, $y \in I$ tali che $|x-y| < \delta$, poiché f è lipschitziana si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon,$$

pertanto f è uniformemente continua.

□

Proposizione 10.24. *Data* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile, se* f' *è limitata allora* f *è uniformemente continua, in particolare* f *è lipschitziana.*

Dimostrazione.
Mostriamo che f è una funzione lipschitziana. Consideriamo x, $y \in (a, b)$, per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, y]$ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, da cui $|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - y|$. Dalla limitatezza di f' si ha che esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) < C$ per ogni $x \in (a, b)$, in particolare $f'(\xi) < C$. Allora $|f(x) - f(y)| < C|x - y|$, pertanto f è lipschitziana, quindi uniformemente continua.

□

10.2.1 Modulo di continuità

Definizione 10.25 (Modulo di continuità)**.** Dati $C \subseteq \mathbb{R}$, $f : C \to \mathbb{R}$, $\omega : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, diciamo che ω è un *modulo di continuità per* f se

- $\omega(0) = 0$
- ω è debolmente crescente
- $\lim\limits_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$
- $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)\ \forall x, y \in C$

Osservazione 10.26. Le funzioni lipschitziane sono tutte e sole le funzioni che hanno come modulo di continuità $\omega(t) = Lt$ per qualche $L > 0$. In generale le funzioni che ammettono modulo di continuità della forma $\omega(t) = Lt^\alpha$ con $\alpha \in (0, 1)$ sono dette funzioni Hölderiane.

Proposizione 10.27. *Dato $C \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, una funzione $f : C \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua su C se e solo se f ammette un modulo di continuità.*

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$). Consideriamo la funzione $\omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in C \wedge |x - y| \leq t\}$, mostriamo che ω_f è un modulo di continuità per f.

- $\omega_f \geq 0$ per definizione
- ω_f è una funzione monotona crescente per la monotonia dell'estremo superiore al crescere dell'insieme
- $\omega_f(0) = \sup\{|f(x) - f(x)|\} = 0$
- Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ la costante garantita dalla continuità uniforme di f. Se $t < \delta$ e $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, pertanto $\omega_f(t) < \varepsilon\ \forall t < \delta$, cioè $\lim\limits_{t \to 0^+} \omega_f(t) = 0$
- Per costruzione $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$

Pertanto ω_f è un modulo di continuità per f.

($\Longleftarrow$). Sia ω un modulo di continuità per f, poiché $\lim\limits_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(t) < \varepsilon\ \forall t < \delta$. Ponendo $t = |x - y|$ abbiamo $|f(x) - f(y)| \leq \omega(t) < \varepsilon\ \forall x$, y tali che $|x - y| < \delta$, cioè f è uniformemente continua.

□

Definizione 10.28 (Modulo di continuità ottimale)**.** Dati $C \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua, diciamo che $\omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in C \wedge |x - y| \leq t\}$ è il *modulo di continuità ottimale per* f.

Proposizione 10.29. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua, ω_f il modulo di continuità ottimale per f, allora ω_f è subadditivo, cioè $\omega_f(t + s) \leq \omega_f(t) + \omega_f(s)\ \forall t,\ s \geq 0$.*

Dimostrazione.
Siano $s, t > 0$, $\omega_f(t+s) = \{|f(x)-f(y)| : x, y \in I \wedge |x-y| \leq t+s\}$. Fissati $x, y \in I$ tali che $|x-y| \leq t+s$, sia $z \in I$ tale che $|x - z| \leq t$, $|y - z| \leq s$. Per disuguaglianza triangolare

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(y) - f(z)|,$$

stimando con i moduli di continuità

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - z|) + \omega_f(|y - z|) \leq \omega_f(t) + \omega_f(s).$$

□

Proposizione 10.30. *Data $\omega : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, se ω è debolmente crescente, subadditiva e $\lim\limits_{x \to 0^+} \omega(x) = 0$ allora ω ha crescita sublineare, cioè esistono a, $b \in \mathbb{R}$ tali che $\omega(x) \leq ax + b\ \forall x \geq 0$.*

Dimostrazione.
Poiché $\lim_{x\to 0^+} \omega(x) = 0$ esiste $\delta \geq 0$ tale che $\omega(\delta) \in [0, 1)$, inoltre per la subadditività di ω abbiamo che $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sia $t \in [0, +\infty)$, per la proprietà archimedea di $\mathbb{R}$ si ha che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n\delta \leq t < (n + 1)\delta$. Poiché ω è debolmente crescente si ha $\omega(n\delta) \leq \omega(t) \leq \omega((n + 1)\delta)$. In particolare

$$\omega(t) \leq (n + 1)\omega(\delta) = n\omega(\delta) + \omega(\delta) \leq t\frac{\omega(\delta)}{n} + \omega(\delta).$$

Poiché $\omega(\delta)$ e n sono costanti reali si ha la tesi.

□

Osservazione 10.31. Il modulo di continuità di una funzione è sublineare.

Proposizione 10.32. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, se f è uniformemente continua allora f ha crescita sublineare.*

Dimostrazione.
Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ la costante garantita dalla continuità uniforme di f. Supponiamo che I sia chiuso, cioè $I = [a, b]$, osserviamo che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $b - a < m\frac{\delta}{2}$. Consideriamo la suddivisione uniforme di I $\pi = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ tale che $t_k - t_{k-1} = \frac{a-b}{n}$ $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $n > m$, chiamiamo J_k gli intervalli $[t_{k-1}, t_k]$. Osserviamo che $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ $\forall x_{k+1} \in J_{k+1}$, $\forall x_k \in J_k$ per $k \in \{1, \dots, n\}$, inoltre fissato $x_j \in J_j$ abbiamo che $a + (j - 1)\frac{\delta}{2} < x_j < a + j\frac{\delta}{2}$ per costruzione della suddivisione. Abbiamo quindi

$$|f(x_j)| = \left| f(x_1) + \sum_{k=1}^{j-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|$$

con $x_i \in J_i$ $\forall i \in \{1, \dots, j\}$, da cui

$$|f(x_j)| \leq |f(x_1)| + \sum_{k=1}^{j-1} |f(x_{k+1} - f(x_k)| < |f(x_1)| + (j - 1)\varepsilon.$$

Posto $b = \sup\{|f(x_1)| : x_1 \in J_1\}$ abbiamo

$$|f(x_j)| < b + j\varepsilon - \varepsilon = b + j\frac{2\delta}{2\delta}\varepsilon - \varepsilon < \frac{2\varepsilon}{\delta}(x_j - a) + b - \varepsilon,$$

cioè la tesi. Se I è aperto in almeno uno dei due estremi, supponiamo che sia aperto in a, possiamo considerare una suddivisione tale che $t_0 = a + \lambda$ con $\lambda \in (0, \delta)$ e $t_k - t_{k-1} < \frac{b-a}{n}$ $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ e ragionare in modo analogo.

□

Proposizione 10.33. *Data $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, se f è uniformemente continua su $[a, b)$ allora possiamo estendere f a una funzione continua su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Osserviamo che la tesi è equivalente a mostrare che esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che per ogni successione x_n a valori in $[a, b)$ convergente in b si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. Fissiamo tale successione x_n, dal momento che è limitata abbiamo che esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ a meno di passare a sottosuccessioni. Sia y_n un'altra successione a valori in $\mathbb{R}$ convergente in b, scriviamo $f(y_n) = f(x_n)+f(y_n)-f(x_n)$ e poniamo $\varepsilon(n) = f(y_n) - f(x_n)$. Sia ω_f il modulo di continuità ottimale per f, abbiamo che $|\varepsilon(n)| \leq \omega_f(|y_n - x_n|)$, pertanto $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$, cioè $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \ell$.

□

Osservazione 10.34. Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua, consideriamo $\pi = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ una suddivisione di $[a, b]$, ω un modulo di continuità per f. Posti ξ_k, $\nu_k \in I_k$ rispettivamente i punti di massimo e minimo di f su I_k, abbiamo che

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|(f(\xi_k) - f(\nu_k)) \leq \sum_{k=1}^{n} |I_k|\omega(|I_k|) \leq (b - a)\omega(\delta)$$

con $\delta = \max\{|I_k| : 1 \leq k \leq n\}$

10.2.2 Integrabilità di funzioni continue

Teorema 10.35. *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Poiché f è continua su $[a, b]$, per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo, pertanto è limitata. Inoltre f è uniformemente continua su $[a, b]$ per il Teorema di Heine-Cantor in quanto $[a, b]$ è un insieme compatto. Fissati $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, consideriamo la suddivisione uniforme $\pi = \left\{t_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \mid 0 \leq k \leq n\right\}$, abbiamo

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\max_{I_k} f - \min_{I_k} f\right).$$

Per la continuità uniforme di f, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Per n tale che $\delta \geq \frac{b-a}{n}$ abbiamo che se $|x - y| < \frac{b-a}{n}$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, pertanto

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \frac{b-a}{n}(n\varepsilon) = (b-a)\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo che f è integrabile.

$\square$

Osservazione 10.36. Una dimostrazione simile funziona per una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e limitata.

Dimostrazione.
Sia $C \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq C$ $\forall x \in (a, b)$. Fissato $\varepsilon > 0$ consideriamo una suddivisione $\pi = \{t_0, \dots, t_{n+2}\}$ di $[a, b]$ tale che $t_0 = a$, $t_1 = a + \varepsilon$, $t_{n+1} = b - \varepsilon$, $t_{n+2} = b$, $t_{k+1} - t_k = \frac{b-a-2\varepsilon}{n}$ $\forall k \in \{1, \dots, n\}$. Abbiamo

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq 4C\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a-2\varepsilon}{n} \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right)$$

($4C\varepsilon$ è una stima per f negli intervalli $(a, a + \varepsilon)$, $(b - \varepsilon, b)$). Come prima, per la continuità uniforme di f esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq 4C\varepsilon + (b-a)\varepsilon,$$

pertanto f è integrabile.

$\square$

Teorema 10.37. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, se* $\mathrm{disc}(f)$ *è finito o numerabile allora f è integrabile.*

Definizione 10.38 (Insieme trascurabile)**.** Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice *trascurabile* o *di misura nulla* se $\forall \varepsilon > 0$ esiste una successione di intervalli $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon$.

Osservazione 10.39. Se E è un insieme numerabile allora è trascurabile.

Più in generale abbiamo

Teorema 10.40 (Vitali-Lebesgue)**.** *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, f è integrabile se e solo se* $\mathrm{disc}(f)$ *è trascurabile.*

10.3 Proprietà e teoremi principali

Definizione 10.41 (Media integrale)**.** Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, chiamiamo *media integrale di f su $[a, b]$* la quantità $\fint_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Teorema 10.42 (Media integrale)**.** *Data $f[a, b] \to \mathbb{R}$ continua, esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = \fint_a^b f(x)dx$.*

Dimostrazione.
Per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su $[a,b]$. Stimando $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ con le somme superiori e inferiori di f rispetto alla partizione $\{a,b\}$ abbiamo

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\max_{[a,b]} f,$$

da cui segue

$$\min_{[a,b]} f \leq \fint_a^b f(x)dx \leq \max_{[a,b]} f.$$

Allora per il Teorema dei valori intermedi esiste $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = \displaystyle\fint_a^b f(x)dx$.

□

Definizione 10.43. Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, poniamo $\mathcal{R}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è integrabile}\}$

Proposizione 10.44 (Linearità dell'integrale)**.** *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f,\, g \in \mathcal{R}(I)$, allora*

1. $C \cdot f \in \mathcal{R}(I)\ \forall C \in \mathbb{R}$ *e* $\displaystyle\int_I C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_I f(x)dx$
2. $f + g \in \mathcal{R}(I)$ *e* $\displaystyle\int_I (f(x)+g(x))dx = \int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx$

In particolare $\mathcal{R}(I)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\displaystyle\int_I$ è un'applicazione lineare su $\mathcal{R}(I)$.

Dimostrazione.

1. Sia $a \geq 0$, per ogni partizione π finita di I si ha $S(af,\pi) = aS(f,\pi)$ e $s(af,\pi) = as(f,\pi)$. Pertanto

$$\sup_\pi s(af,\pi) = \sup_\pi as(f,\pi) = \inf_\pi aS(f,\pi) = \inf_\pi S(af,\pi).$$

Per $a < 0$ è sufficiente mostrare che $-f \in \mathcal{R}(I)$. Per ogni partizione π finita di I si ha $S(-f,\pi) = -s(f,\pi)$ e $s(-f,\pi) = -S(f,\pi)$, pertanto

$$\sup_\pi s(-f,\pi) = \inf_\pi S(-f,\pi) = -\int_I f(x)dx.$$

2? (Questa forse la toglierò e rimarrà la dimostrazione scritta dopo)
Fissata una partizione $\pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ finita di I abbiamo

$$S(f+g,\pi) = \sum_{k=1}^n |I_k| \sup_{I_k}(f+g) \leq \sum_{k=1}^n |I_k| \left(\sup_{I_k} f + \sup_{I_k} g\right) = S(f,\pi) + S(g,\pi).$$

In modo analogo si mostra che $s(f+g,\pi) \geq s(f,\pi) + s(g,\pi)$. Allora

$$\begin{aligned}\int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx = \sup_\pi s(f,\pi) + \sup_\pi s(g,\pi) \geq \sup_\pi (s(f,\pi) + s(g,\pi)) \leq \\ \leq \sup_\pi s(f+g,\pi) \leq s(f+g) \leq S(f+g) = \inf_\pi S(f+g,\pi) \leq \\ \leq \inf_\pi S(f,\pi) + \inf_\pi S(g,\pi) = \int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx,\end{aligned}$$

cioè $\displaystyle\int_I (f(x)+g(x))dx = \int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx$.

2 Fissiamo π_1, π_2 suddivisioni distinte di I, poiché $f,\, g \in \mathcal{R}(I)$ esistono $\varepsilon_1,\, \varepsilon_2 > 0$ tali che $S(f,\pi_1) - s(f,\pi_1) < \varepsilon_1$, $S(g,\pi_2) - s(g,\pi_2) < \varepsilon_2$. Consideriamo la partizione unione

$\pi = \pi_1 \cup \pi_2 = \{t_0, \ldots, t_n\}$, si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$ e $S(g,\pi) - s(g,\pi) < \varepsilon$. Posti I_k gli intervalli indotti dalla partizione π per $k \in \{1, \ldots, n\}$ abbiamo

$$S(f+g,\pi) - s(f+g,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|(\sup_{I_k}(f+g) - \inf_{I_k}(f+g)) \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n} |I_k|(\sup_{I_k} f + \sup_{I_k} g - \inf_{I_k} f - \inf_{I_k} g) = S(f,\pi) - s(f,\pi) + S(g,\pi) - s(g,\pi) < 2\varepsilon,$$

pertanto $f + g \in \mathcal{R}(I)$. Consideriamo adesso $\pi_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ la partizione uniforme:

$$S(f,\pi) + S(g,\pi) - S(f+g,\pi) = \sum_{k=0}^{n} |I_k|(\sup_{I_k} f + \sup_{I_k} g - \sup I_k(f+g)).$$

Poiché f e g sono limitate, si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $S(f,\pi) + S(g,\pi) - S(f+g,\pi) < \varepsilon$. Per $n \to +\infty$ si ha che la differenza tra le somme superiori tende a 0, pertanto

$$\int_I (f(x) + g(x))dx = \int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx.$$

□

Proposizione 10.45 (Additività rispetto al dominio)**.** *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo tale che $I = I_1 \cup I_2$ con I_1, $I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervalli e $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $f \in \mathcal{R}(I)$, allora $f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1)$, $f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2)$ e $\int_I f(x)dx = \int_{I_1} f|_{I_1}(x)dx + \int_{I_2} f|_{I_2}(x)dx$.*

Dimostrazione.
Poniamo $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I_1 \\ 0 & x \in I_2 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in I_1 \\ f(x) & x \in I_2 \end{cases}$, osserviamo che $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $\forall x \in I$. Senza perdita di generalità supponiamo che $x < y$ $\forall x \in I_1$, $\forall y \in I_2$. Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo una suddivisione π finita di I tale che $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$ e $\sup I_1 = \inf I_2 \in \pi$. Poniamo quindi $\pi_1 = \pi \cap I_1$ suddivisione relativa a I_1, $\pi_2 = \pi \cap I_2$ suddivisione relativa a I_2, $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Osserviamo che

$$S(f|_{I_1}, \pi_1) - s(f|_{I_1}, \pi_1) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon,$$
$$S(f|_{I_2}, \pi_2) - s(f|_{I_2}, \pi_2) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon,$$

pertanto $f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1)$ e $f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2)$. Inoltre

$$S(f|_{I_1}, \pi_1) = S(f_1, \pi),$$
$$s(f|_{I_2}, \pi_1) = s(f_1, \pi)$$

e analogamente per $f|_{I_2}$, pertanto $\int_{I_1} f|_{I_1}(x)dx = \int_I f_1(x)dx$ e $\int_{I_2} f|_{I_2}(x)dx = \int_I f_2(x)dx$. Per la linearità dell'integrale allora

$$\int_I f(x)dx = \int_I f_1(x)dx + \int_I f_2(x)dx = \int_{I_1} f|_{I_1}(x)dx + \int_{I_2} f|_{I_2}(x)dx.$$

□

Osservazione 10.46. Quanto detto sopra si scrive generalmente come

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

con $a < b < c$. Per convenzione si pone $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ se $a > b$.

Proposizione 10.47. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f \in \mathcal{R}(I)$, allora $|f| \in \mathcal{R}(I)$ e* $\left|\int_I f(x)dx\right| \leq \int_I |f(x)|dx$.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo una partizione $\pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ finita di I tale che $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$. Osserviamo che $\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \geq \sup_{I_k} |f| - \inf_{I_k} |f|$, pertanto

$$S(|f|,\pi) - s(|f|,\pi) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon,$$

cioè $|f| \in \mathcal{R}(I)$. Inoltre abbiamo che $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\ \forall x \in I$, pertanto

$$-\int_I |f(x)|dx \leq \int_I f(x)dx \leq \int_I |f(x)|dx,$$

cioè $\left|\int_I f(x)dx\right| \leq \int_I |f(x)|dx$.

□

Definizione 10.48 (Primitiva di una funzione)**.** Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ integrabile, una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva di* f se F è differenziabile su I e $F' = f$.

Osservazione 10.49. Se F_1, F_2 sono primitive di f allora differiscono per una costante.

Definizione 10.50 (Integrale indefinito)**.** Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile, poniamo $\int f(x)dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F' = f\}$ l'*integrale indefinito di* f. Spesso indicheremo con $\int f(x)dx + C$ una generica primitiva di f.

Teorema 10.51 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $x_0 \in I$, la funzione $F_{x_0} : I \to \mathbb{R}$ definita da $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ è una primitiva di f. Inoltre, data F una primitiva di f, si ha $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)\ \forall a, b \in I$ con $b > a$.*

Dimostrazione.
Calcoliamo la derivata di F_{x_0}:

$$F'_{x_0}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt.$$

Per il Teorema della media integrale esiste ξ tra x e $x+h$ tale che $f(\xi) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$. D'altra parte per $h \to 0$ si ha $\xi \to x$, pertanto

$$F'_{x_0}(x) = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x).$$

Consideriamo $F : I \to \mathbb{R}$ una generica primitiva di f, abbiamo che $F_{x_0}(x) = F(x) + C_{x_0}$ con $C_{x_0} \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Allora abbiamo che

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^b f(t)dt = F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) =$$
$$= F(b) + C_{x_0} - F(a) - C_{x_0} = F(b) - F(a).$$

□

10.4 Tecniche di integrazione

Abbiamo visto che per calcolare un integrale è sufficiente calcolare una sua primitiva. Tuttavia a differenza delle derivate, le primitive di funzioni elementari non sono sempre esprimibili come combinazione di funzioni elementari. Diamo comunque una tabella di alcune primitive notevoli che possiamo ricavare a partire dalle regole di derivazione.

$F(x)$	$F'(x)$
$C \in \mathbb{R}$	0
x^a, $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^{ax}, $a \in \mathbb{R}$	ae^{ax}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	$C \in \mathbb{R}$
x^a, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert + C$
e^{ax}, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Ricordiamo che $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Date f, g integrabili e differenziabili su $[a, b]$, dalle regole di derivazione ricaviamo le seguenti regole di integrazione.

- **Integrazione per parti.** Da $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ abbiamo

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

- **Integrazione per sostituzione.** Da $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$, sostituendo $y = g(x)$, abbiamo

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(y)dy$$

10.4.1 Integrazione di funzioni razionali

Descriviamo una procedura generale per l'integrazione di funzioni razionali della forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$.

1. Fattorizziamo il denominatore $q(x) = k \displaystyle\prod_{i=1}^{n} q_i^{\alpha_i}(x)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \deg q_i = \deg q$, $q_i(x)$ monico e $\deg q_i = 1, 2$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Per semplicità supponiamo che $p(x)$ e $q(x)$ siano entrambi monici, cioè $k = 1$.

2. Dividiamo $p(x)$ per $q(x)$ e scriviamo $\dfrac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \dfrac{p_2(x)}{q(x)}$ con $\deg p_2 < \deg q$.

3. Scriviamo $p_2(x)q(x)$ come somma di funzioni razionali con denominatore una potenza di un polinomio irriducibile: $\dfrac{p_2(x)}{q(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \dfrac{p_{i,j}(x)}{q_i^j(x)}$ con $\deg p_{i,j} < \deg q_i$.

4. Se $\deg q_i = 1$ abbiamo che $p_{i,j}(x) = p_{i,j}$ è costante pertanto l'integrale relativo a $p_{i,j}$ è della forma $p_{i,j} \displaystyle\int \dfrac{1}{(x+a)^j} dx = \begin{cases} p_{i,j} \log \lvert x + a \rvert + C & j = 1 \\ -\dfrac{p_{i,j}}{j-1} \cdot \dfrac{1}{(x+a)^{j-1}} & j \neq 1 \end{cases}$.

5. Se $\deg q_i = 2$, scriviamo $q_i(x) = x^2 + ax + b$, $p_{i,j}(x) = r_1 x + r_2 = \dfrac{r_1}{2}(2x + a) + c = \dfrac{r_1}{2} q_i'(x) + c$. Allora abbiamo $\displaystyle\int \dfrac{p_{i,j}(x)}{q_i^j(x)} dx = \dfrac{r_1}{2} \int \dfrac{q_i'(x)}{q_i^j(x)} dx + c \int \dfrac{1}{q_i^j(x)} dx$ e possiamo calcolare il primo addendo per sostituzione.

6. Scriviamo $q_i(x) = x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left(\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right)+1\right)$. Sostituendo $y = \frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}$ otteniamo $\left(b-\frac{a^2}{4}\right)(y^2+1)$. Possiamo quindi ridurci a studiare l'integrale $\int \frac{1}{(y^2+1)^j}dy$. In particolare questo è uguale a $\arctan y + C$ se $j=1$, altrimenti possiamo integrare ripetutamente per parti per abbassare il grado del denominatore e ricavare una formula chiusa per l'integrale.

Osservazione 10.52. Dati $p(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, possiamo sempre ricondurre integrali del tipo $\int p(x)\log(q(x))dx$, $\int p(x)\arctan(p(x))dx$ a integrali di funzioni razionali integrando per parti.

10.4.2 Sostituzioni razionalizzanti

Vediamo alcune sostituzioni che permettono di ricondurre una combinazione di funzioni elementari a una funzione razionale (indichiamo con R una generica funzione razionale).

- $\int R(e^x)dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x}e^x dx$, sostituendo $y = e^x$ si ottiene $\int \frac{R(y)}{y}dy$
- $\int R(\sin x, \cos x)dx$, sostituendo $y = \tan\frac{x}{2}$ e applicando le formule di bisezione si ha $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, da cui si ottiene $2\int R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{1}{1+y^2}dy$
- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, sostituendo $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ si ottiene l'integrale di una funzione razionale
- $\int R(x, \sqrt[n]{a^2-x^2})dx$, sostituendo $y = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ si ottiene $\int a\cos y R(a\sin y, a\cos y)dy$, che sappiamo razionalizzare
- $\int R(x, \sqrt{x^2+c})dx$. Se $c>0$ sostituiamo $x = \sqrt{c}\sinh y$, se $c<0$ sostituiamo $x = \sqrt{-c}\cosh y$. Si ottiene così un integrale del tipo $\int \tilde{R}(e^t)dt$ che sappiamo razionalizzare. In alternativa possiamo sostituire $(x+y)^2 = x^2+c$

10.4.3 Decomposizione di Hermite

Consideriamo due polinomi $p(x)$, $q(x)$ a coefficienti reali, sia

$$q(x) = a(x-b_1)^{n_1}\dots(x-b_j)^{n_j}(x^2+c_1x+d_1)^{m_1}\dots(x^2+c_kx+d_k)^{m_k}$$

la fattorizzazione in irriducibili di $q(x)$. Possiamo scrivere

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p^*(x)}{q^*(x)} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\hat{p}(x)}{\hat{q}(x)}\right)$$

con

$$\begin{gathered} q^*(x) = (x-b_1)\dots(x-b_j)(x^2+c_1x+d_1)\dots(x^2+c_kx+d_k), \\ \hat{q}(x) = (x-b_1)^{n_1-1}\dots(x-b_j)^{n_j-1}(x^2+c_1x+d_1)^{m_1-1}\dots(x^2+c_kx+d_k)^{m_k-1}, \\ \hat{p}(x) \text{ tale che } \deg\hat{p} = \deg q^* - 1, \\ p^*(x) \text{ tale che } \deg p^* \geq \deg q^* - 1. \end{gathered}$$

10.4.4 Formula di Taylor con resto integrale

Proposizione 10.53. *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte su un intorno I di x_0, se $f^{(n+1)}$ è integrabile allora $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ per ogni $x \in I$.*

Dimostrazione.
Sia $R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$, fissati x, x_0 mostriamo la tesi per induzione su n. Per $n = 0$ abbiamo

$$f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(x)dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$$

per il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Per $n > 0$ supponiamo che la tesi sia vera per n e mostriamola per $n+1$. Osserviamo che

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Integrando R_n per parti

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt =$$
$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1}.$$

Quindi abbiamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}.$$

□

Confrontiamo il resto integrale con il resto di Lagrange. Per il Teorema di Lagrange esiste ξ compreso tra x e x_0 tale che

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

da cui

$$f^{(n+1)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} (n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} f^{(n+1)}dt.$$

Posto $p_n(t) = (n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$, osserviamo che $\int_{x_0}^{x} p_n(t)dt = 1$.

Osservazione 10.54. Se f è una funzione continua è possibile dimostrare il Teorema di Lagrange per lo sviluppo di Taylor a partire dallo sviluppo con resto integrale. Utilizzando le stesse notazioni, posti $M_n = \max_{[x_0,x]} f^{(n+1)}$, $m_n = \min_{[x_0,x]} f^{(n+1)}$, abbiamo che

$$m_n \int_{x_0}^{x} p_n(t)dt \leq \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)p_n(t)dt \leq M_n \int_{x_0}^{x} p_n(t)dt.$$

Per il Teorema dei valori intermedi esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che $f^{(n+1)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)p_n(t)dt$. Pertanto

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

10.5 Integrali impropri

Definizione 10.55 (Integrabilità impropria)**.** Data $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, una funzione integrabile su $[a, c]$ $\forall c \in (a, b)$ si dice *integrabile impropriamente su* $[a, b)$ se esiste finito $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$. Analogamente $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, una funzione integrabile su $[c, b]$ $\forall c \in (a, b)$ si dice *integrabile impropriamente su* $(a, b]$ se esiste finito $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$. In generale diciamo che $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, è *integrabile impropriamente su* (a, b) se f è integrabile impropriamente su $(a, x_0]$ e $[x_0, b)$ $\forall x_0 \in (a, b)$.

Proposizione 10.56. *$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ non è integrabile su $(0, +\infty)$. In particolare f è integrabile su $(0, 1]$ per $\alpha > -1$ ed è integrabile su $[1, +\infty)$ per $\alpha < -1$.*

Dimostrazione.
Osserviamo che se $\alpha \geq 0$ $f(x)$ è integrabile su $(0, 1]$, ma non è integrabile su $[1, +\infty)$, consideriamo quindi $\alpha < 0$. Fissato $\varepsilon > 0$ abbiamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_\varepsilon^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{\alpha+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ +\infty & \alpha < -1 \end{cases}.$$

Pertanto $f(x)$ è integrabile su $(0, 1]$ per $\alpha > -1$. Fissato $M > 0$ abbiamo che

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M f(x)dx = \lim_{M\to+\infty} \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_1^M = -\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} \lim_{M\to+\infty} M^{\alpha+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \\ +\infty & \alpha > -1 \end{cases}.$$

Pertanto $f(x)$ è integrabile su $[1, +\infty)$ per $\alpha < -1$, quindi $f(x)$ non è integrabile su $(0, +\infty)$.

□

Teorema 10.57 (Confronto)**.** *Date f, g funzioni da $[x_0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$ integrabili su $[x_0, M]$ $\forall M > x_0$, se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [x_0, +\infty)$ e g è integrabile su $[x_0, +\infty)$ allora f è integrabile su $[x_0, +\infty)$.*

Dimostrazione.
Poiché $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [x_0, +\infty)$, per la monotonia dell'integrale si ha

$$0 \leq \int_{x_0}^M f(x)dx \leq \int_{x_0}^M g(x)dx.$$

Passando al limite superiore si ha quindi

$$\limsup_{M\to+\infty} \int_{x_0}^M f(x)dx \leq \int_{x_0}^M g(x)dx.$$

Poiché $f \geq 0$ l'applicazione che associa a M l'integrale $\int_{x_0}^M f(x)dx$ è crescente e limitata, pertanto ammette limite. Quindi esiste finito

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{x_0}^M f(x)dx = \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} g(x)dx.$$

□

Osservazione 10.58.

- Il criterio è valido anche per funzioni definite su intervalli limitati
- Se $f \geq 0$, f non è integrabile su $[x_0, +\infty)$ se e solo se $\lim_{M\to+\infty} \int_{x_0}^M f(x)dx = +\infty$.

Proposizione 10.59. *Data $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, se f è decrescente e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ allora $f(x) \sin x$ è integrabile su $[0, +\infty)$.*

Dimostrazione.
Sia $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\ dx$, scriviamo $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\sin x\ dx$. Sostituendo $x = y + k\pi$ si ha

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(y+k\pi)\sin(y+k\pi)\ dy = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} f(y+k\pi)\sin y\ dy.$$

Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\sin x$ è una funzione limitata si ha $\lim\limits_{k\to+\infty} f(y+k\pi)\sin y = 0$, da cui

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\pi} f(y+k\pi)\sin y\ dy = 0.$$

Inoltre tale successione è decrescente, pertanto la serie converge per il Criterio di Leibniz, quindi $f(x)\sin x$ è integrabile su $[0,+\infty)$.

□

Corollario 10.60 (Confronto asintotico)**.** *Date f, g funzioni da $[x_0,+\infty)$ in $\mathbb{R}$ definitivamente positive, se $f \sim g$ per $x \to +\infty$ allora f è integrabile su $[x_0,+\infty)$ se e solo se g è integrabile su $[x_0,+\infty)$.*

Dimostrazione.
Poiché $f \sim g$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste x_ε tale che

$$(1-\varepsilon)f(x) \le g(x) \le (1+\varepsilon)f(x)\ \forall x > x_\varepsilon.$$

Osserviamo che la funzione $(1+\varepsilon)f$ è integrabile su $[x_0,+\infty)$, pertanto g è integrabile su $[x_0,+\infty)$ per il Teorema del confronto. L'altra implicazione si mostra in modo analogo.

□

Definizione 10.61 (Assoluta integrabilità)**.** Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *assolutamente integrabile su I* se f è integrabile su $[a,b]$ $\forall [a,b] \subseteq I$ e $|f|$ è integrabile (anche in senso improprio) su I.

Teorema 10.62. *Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, se f è assolutamente integrabile su I allora è integrabile impropriamente su I.*

Dimostrazione.
Per ogni $x \in I$ siano $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ la parte positiva di f, $f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$ la parte negativa di f, chiaramente abbiamo $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ $\forall x \in I$, pertanto $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ $\forall x \in I$. In particolare $0 \le f^+(x), f^-(x) \le |f(x)|$. Per il Teorema del confronto abbiamo che f^+, f^- sono integrabili su I, pertanto f è integrabile su I per la linearità dell'integrale.

□

Osservazione 10.63. Se $|f|$ è integrabile su I allora

$$\left|\int_I f(x)dx\right| = \left|\int_I f^+(x)dx - \int_I f^-(x)dx\right| \le \int_I f^+(x)dx + \int_I f^-(x)dx = \int_I |f(x)|dx$$

10.5.1 Criterio integrale per le serie

Data a_n una successione e $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione tale che $f(n) = a_n$, f decrescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$, osserviamo che si ha la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \ge \int_1^N f(x)dx \ge \sum_{n=2}^{N} f(n)\ \forall N \ge 2$$

Teorema 10.64. *Data $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione decrescente, se $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge se e solo se $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.*

Dimostrazione.
Poiché $\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^N f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{N} f(n)$ $\forall N \geq 2$ si ha la tesi per il Teorema dei due carabinieri e per il Criterio del confronto.

□

Osservazione 10.65. Consideriamo la successione limitata $b_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(x)dx$ a valori in $[0, f(1)]$. Abbiamo che

$$b_{N+1} - b_N = \sum_{n=1}^{N+1} f(n) - \int_1^{N+1} f(x)dx - \sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_1^N f(x)dx = f(N+1) - \int_N^{N+1} f(x)dx \leq 0,$$

cioè b_N è decrescente. In particolare abbiamo che $\lim_{N \to +\infty} b_N = \inf_{N \in \mathbb{N}} b_N \in [0, f(1)]$, ovvero

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(x)dx + \inf_{N \in \mathbb{N}} b_N + o(1).$$

Corollario 10.66.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + o(1) \textit{ per } N \to +\infty.$$

10.5.2 Funzione Gamma

Lemma 10.67.

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt = m! \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione.
Mostriamo la tesi per induzione su $m \in \mathbb{N}$. Per $m = 0$ si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{M \to +\infty} -e^{-t}\Big|_0^M = 1 = 0!\ .$$

Per $m > 0$, supponiamo $\int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-t} dt = (m-1)!$. Allora integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt = \lim_{M \to +\infty} -e^{-t} t^m\Big|_0^M + m \int_0^M t^{m-1} e^{-t} dt = m!\ .$$

□

Osservazione 10.68. In generale, posto $I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt$ si ha $I_m = m I_{m-1}$ $\forall m \in \mathbb{R}$.

Proposizione 10.69. *L'integrale* $I(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^\alpha \log^\beta \left(\frac{1}{x}\right) dx$ *converge per* $\alpha,\ \beta > -1$.

Dimostrazione.
Sostituendo $y = \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$ si ha

$$I(\alpha, \beta) = \int_{+\infty}^0 e^{-\alpha y}(-e^{-y}) y^\beta dy = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+1)y} y^\beta dy = \int_0^1 e^{-(\alpha+1)y} y^\beta dy + \int_1^{+\infty} e^{-(\alpha+1)y} y^\beta dy.$$

La funzione $e^{-(\alpha+1)y} y^\beta$ è integrabile su $(0, 1]$ per $\beta > -1$, infatti

$$\int_0^1 e^{-(\alpha+1)y} y^\beta dy \sim \int_0^1 y^\beta (1 - (\alpha+1)y) dy = \int_0^1 y^\beta dy - \int_0^1 (\alpha+1) y^{\beta+1} dy$$

che è ben definito su $(0, 1]$ per $\beta > -1$. Inoltre $e^{-(\alpha+1)} y^\beta$ è integrabile su $[1, +\infty)$ per $\alpha > -1$, infatti:

- per $\alpha \leq -1$ l'integrale non è ben definito in quanto $e^{-(\alpha+1)y}$ è monotona crescente
- per $\alpha > -1$, posto $n \geq \beta$ e $t = -(\alpha+1)y$, si ha
$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+1)y} y^\beta dy \leq \frac{1}{(\alpha+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} y^n e^{-t} dt = \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

□

Osservazione 10.70. In generale si ha $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^m e^{-\lambda t} dt = \frac{m!}{\lambda^{m+1}}$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Definizione 10.71 (Funzione Gamma)**.** Definiamo la funzione $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

Osservazione 10.72.

- La funzione Γ estende la funzione fattoriale ai reali, infatti $\Gamma(m+1) = m!$ $\forall m \in \mathbb{N}$
- Γ è ben definita per $x > 0$ e $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$

Proposizione 10.73. *Posto* $\Gamma_m(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \log^m(t) t^{x-1} e^{-t} dt$ $\forall m \in \mathbb{N}$*, allora*

1. Γ_m *è assolutamente integrabile* $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$
2. $\Gamma_m(x+h) = \Gamma_m(x) + h\Gamma_{m+1}(x) + o(h)$ *per* $h \to 0$
3. $\Gamma'_m(x) = \Gamma_{m+1}(x)$
4. $\Gamma_m(x) = \Gamma^{(m)}(x)$

Dimostrazione.

1. Studiamo l'assoluta integrabilità di $\log^m(t) t^{x-1} e^{-t}$ in $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.
$$\int_0^1 |\log^m(t) t^{x-1} e^{-t}| dt = \int_0^1 \log^m\left(\frac{1}{t}\right) t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 \log^m\left(\frac{1}{t}\right) t^{x-1} dt.$$
Sostituendo $y = -\log t$ si ha
$$\int_0^1 |\log^m(t) t^{x-1} e^{-t}| dt \leq \int_0^{+\infty} y^m e^{-yx} dy,$$
che è ben definito per $m > -1$.
$$\int_1^{+\infty} |\log^m(t) t^{x-1} e^{-t}| dt = \int_1^{+\infty} \log^m(t) t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^{+\infty} t^{x+m-1} e^{-t} dt \leq \Gamma(x+m),$$
che è ben definito per $x + m > 0$.
2. Fissiamo $x > 0$ e $\delta \in (0, x)$ tale che $|h| \leq \delta$, poniamo $R(h) = \Gamma_m(x+h) - \Gamma_m(x) - h\Gamma_{m+1}(x)$. Osserviamo che
$$R(h) = \int_0^{+\infty} \log^m(t) t^{x-1} e^{-t} (t^h - 1 - h \log t) dt.$$
Sia $g(s) = t^s$, abbiamo che $g^{(k)}(s) = \log^k(t) t^s$, pertanto lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange per $g(h)$ intorno a 0 è $g(h) = g(0) + hg'(0) + \dfrac{h^2}{2} g''(\xi)$ con $|\xi| < \delta$, cioè $t^h = 1 + h \log t + \dfrac{h^2}{2} \log^2(t) t^\xi$, in particolare $t^h - 1 - h \log t = \dfrac{h^2}{2} \log^2(t) t^\xi$. Poiché g è una funzione convessa abbiamo che $\displaystyle\max_{|s| \leq \delta} t^s = \max\{t^\delta, t^{-\delta}\} \leq t^\delta + t^{-\delta}$, pertanto $0 \leq t^n - 1 - h \log t \leq \dfrac{h^2}{2} \log^2(t)(t^\delta + t^{-\delta})$. Posto $J_\pm = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2} t^{x \pm \delta - 1} e^{-t} dt$ si ha che
$$R(h) \leq \frac{h^2}{2}(J_+ + J_-).$$
Poiché $|\delta| < x$ abbiamo $x \pm \delta - 1 > -1$, pertanto J_+ e J_- sono quantità finite per il punto precedente, quindi esiste $C \geq 0 \in \mathbb{R}$ tale che $|R(h)| \leq Ch^2$, cioé $R(h) = o(h)$ per $h \to 0$

3. Calcoliamo la derivata di $\Gamma_m(x)$:
$$\Gamma'_m(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma_m(x+h) - \Gamma_m(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma_m(x) + h\Gamma_{m+1}(x) + o(h) - \Gamma_m(x)}{h} = \Gamma_{m+1}(x)$$
4. Reiterando il punto precedente si ha $\Gamma_m(x) = \Gamma_0^{(m)}(x) = \Gamma^{(m)}(x)$

□

10.6 Lunghezza del grafico di una funzione

Definizione 10.74 (Lunghezza del grafico di una funzione)**.** Date $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e una partizione $\pi = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ finita di $[a, b]$, definiamo $L_\pi(\Gamma_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2}$ la *lunghezza della poligonale associata a* π. Definiamo $L(\Gamma_f) = \sup_\pi L_\pi(\Gamma_f)$ la *lunghezza del grafico di* f. Se $L(\Gamma_f) \in \mathbb{R}$ diciamo che il grafico di f è *rettificabile.*

Proposizione 10.75. *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se f è lipschitziana allora Γ_f è rettificabile.*

Dimostrazione.
Sia M la costante di Lipschitz di f, consideriamo una partizione $\pi = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ finita di $[a, b]$, abbiamo
$$L_\pi(\Gamma_f) \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + M^2(t_k - t_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})\sqrt{1 + M^2} = (b - a)\sqrt{1 + M^2}.$$

□

Osservazione 10.76. In generale non è vero che una funzione continua è rettificabile, infatti se consideriamo la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (0, 1] \end{cases}$ si ha che $L(\Gamma_f) = +\infty$.

Proposizione 10.77. *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se $f \in C^1([a, b])$ allora Γ_f è rettificabile e vale* $L(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Dimostrazione.
Consideriamo una partizione $\pi = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ finita di $[a, b]$, abbiamo
$$L_\pi(\Gamma_f) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 - (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2}.$$
Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ tale che $f'(\xi_k) = \dfrac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$, pertanto
$$L_\pi(\Gamma_f) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 - (f'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}))^2} = \sum_{k=0}^{n} (t_k - t_{k-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}.$$
Poniamo $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, $M_k = \sup_{[t_{k-1}, t_k]} g(x)$, $m_k = \inf_{[t_{k-1}, t_k]} g(x)$, abbiamo
$$\sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leq L_\pi(\Gamma_f) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1}),$$
cioè
$$s(g, \pi) \leq L_\pi(\Gamma_f) \leq S(g, \pi).$$

Osserviamo che g è integrabile, inoltre essendo continua su un compatto è uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor, pertanto ammette un modulo di continuità ω_g. Sia $\delta_\pi = \max\{t_k - t_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n\}$ il parametro di finezza di π, $L = \displaystyle\int_a^b g(x)dx$, allora

$$|L_\pi(\Gamma_f) - L| \leq S(g,\pi) - s(g,\pi) \leq (b-a)\omega_g(\delta_\pi).$$

Mostriamo adesso che $L_\pi(\Gamma_f) \leq L$ per ogni partizione π finita di $[a,b]$. Consideriamo la partizione uniforme π_n, abbiamo che

$$L_\pi(\Gamma_f) \leq L_{\pi\cup\pi_n}(\Gamma_f) \leq L + (b-a)\omega_g(\delta_{\pi\cup\pi_n}) \leq L + (b-a)\omega_g(\delta_{\pi_n})$$

per la monotonia crescente dei moduli di continuità, pertanto $L_\pi(\Gamma_f) \leq L$. Abbiamo quindi

$$L(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

$\square$

10.7 Curve in $\mathbb{R}^n$

Definizione 10.78 (Curva)**.** Una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua si dice *curva* e $\gamma([a,b])$ si dice *supporto di* γ. Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ diciamo che la curva è *chiusa*.

Definizione 10.79 (Lunghezza di una curva)**.** Data $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva e $\pi = \{t_0 = a, \ldots, t_m = b\}$ una suddivisione finita di $[a,b]$, poniamo $L(\gamma) = \sup\limits_\pi \sum\limits_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \in [0,+\infty]$ la *lunghezza di* γ. Se $L(\gamma) \in [0,+\infty)$ diciamo che γ è rettificabile.

Osservazione 10.80. Nel caso $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(x) = (x, f(x))$ abbiamo che il supporto di γ è Γ_f. Inoltre se $f \in C^1([a,b])$ abbiamo visto che $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \in [0,+\infty)$.

Proposizione 10.81. *Data $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva, se $\gamma \in C^1([a,b])$ allora γ è rettificabile e vale $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|dt$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\pi = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\}$ una partizione finita di $[a,b]$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che

$$|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)dt\right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|dt \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\},$$

da cui

$$L(\gamma) = \sup_\pi \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Mostriamo adesso la disuguaglianza inversa. Poiché γ' è continua su $[a,b]$, per il Teorema di Heine-Cantor abbiamo che è uniformemente continua. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste quindi $\delta > 0$ tale che per ogni x, $y \in [a,b]$ tali che $|x-y| < \delta$ si ha $|\gamma'(x) - \gamma'(y)| < \varepsilon$. Fissato $\delta > 0$ consideriamo $\pi_\varepsilon = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che $t_k - t_{k-1} < \delta$ $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$. In particolare scegliamo y tale che $\gamma'(y) = \displaystyle\fint_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)dt$, abbiamo

$$\left|\gamma'(x) - \fint_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma(t)dt\right| < \varepsilon \quad \forall x \in [t_{k-1}, t_k],\ \forall k \in \{1, \ldots, n\},$$

da cui

$$|\gamma'(x)| - \left|\fint_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)dt\right| \leq \left|\gamma'(x) - \fint_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma(t)dt\right| < \varepsilon \quad \forall x \in [t_{k-1}, t_k],\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Scegliamo adesso x tale che $|\gamma'(x)| = \fint_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|dt$, abbiamo

$$\fint_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|dt - \left|\fint_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)dt\right| < \varepsilon \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Moltiplicando per $t_k - t_{k-1}$ e sommando su k allora

$$\begin{aligned}\int_a^b |\gamma'(t)|dt &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)dt \right| + \varepsilon(t_k - t_{k-1}) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + \varepsilon(b-a) \leq L(\gamma) + \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha quindi $L(\gamma) \geq \int_a^b |\gamma'(t)|dt$, pertanto l'uguaglianza.

□

Osservazione 10.82.

- Questo risultato generalizza quanto visto per la lunghezza del grafico di una funzione. Consideriamo infatti una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(x) = (x, f(x))$ $\forall x \in [a,b]$. Allora abbiamo che
$$\int_a^b |\gamma(x)|dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = L(\Gamma_f)$$
- È possibile mostrare questo risultato anche per funzioni lipschitziane
- Possiamo rappresentare una curva in $\mathbb{R}^2$ in coordinate polari e calcolarne la lunghezza. Consideriamo $\rho : [\vartheta_1, \vartheta_2] \to [0, +\infty)$ di classe C^1, consideriamo la curva $\gamma : [\vartheta_1, \vartheta_2] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(\vartheta) = (\rho(\vartheta)\cos\vartheta, \rho(\vartheta)\sin\vartheta)$. Abbiamo che
$$\begin{aligned}L(\gamma) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\gamma'(\vartheta)|d\vartheta &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{(\rho'(\vartheta)\cos\vartheta - \rho(\vartheta)\sin\vartheta)^2 + (\rho'(\vartheta)\sin\vartheta + \rho(\vartheta)\cos\vartheta)^2}d\vartheta = \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{(\rho'(\vartheta))^2 + (\rho(\vartheta))^2}d\vartheta.\end{aligned}$$

Capitolo 11

Equazioni differenziali ordinarie

Definizione 11.1 (Equazione differenziale)**.** Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $y : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte su I, F una funzione definita su un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, diciamo che la relazione $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ è un'*equazione differenziale ordinaria di ordine n*. Se F non dipende da x diciamo che è un'equazione *autonoma*. Se F è lineare in ogni suo argomento, cioè $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x) y^{(j)}(x) + b(x)$ diciamo che è un'equazione *lineare*, se $b(x) = 0$ diciamo che è un'equazione lineare *omogenea*.

Osservazione 11.2. Le soluzioni di un'equazione differenziale non sono uniche. Consideriamo infatti l'equazione $y''(x) = 0$, integrando due volte otteniamo che le soluzioni di tale equazione sono della forma $y(x) = cx + d$ al variare di c, d in $\mathbb{R}$.

Definizione 11.3 (Problema di Cauchy)**.** Data $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(n)) = 0$ un'equazione differenziale ordinaria di grado n, chiamiamo *problema di Cauchy* il seguente sistema

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(n)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Osservazione 11.4. Anche per il problema di Cauchy non esiste sempre una soluzione unica, ad esempio il problema $\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ammette come soluzione sia $y(x) = 0\ \forall x$, sia $y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & x > 0 \end{cases}$.

11.1 Equazioni del primo ordine in forma normale

Definizione 11.5 (Forma normale)**.** Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $y : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I, un'equazione differenziale del primo ordine del tipo $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ può essere scritta in *forma normale* se può essere esplicitata rispetto a $y'(x)$, cioè se esiste $f : I \times y(I) \to \mathbb{R}$ tale che $y'(x) = f(x, y(x))$.

Teorema 11.6 (Esistenza e unicità locale, Cauchy-Lipschitz)**.** *Dati $f : [a, b] \times y([a, b]) \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in [a, b]$, se f è continua in (x, y) e localmente lipschitziana in y allora esiste $\delta > 0$ con $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$ tale che esiste un'unica $y \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Osservazione 11.7. Se viene a mancare l'ipotesi di locale lipschizianeità non si ha unicità locale nella soluzione. Consideriamo ad esempio il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

una soluzione particolare è data dalla funzione identicamente nulla $y = 0$, si ha inoltre che $y = \dfrac{(x+C)^2}{4}$, con $C \in \mathbb{R}$, è una soluzione. Possiamo quindi combinare tra loro queste due funzioni per ottenere soluzioni diverse.

Teorema 11.8 (Peano)**.** *Dati $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $[a,b]$, $f : [a,b] \times y([a,b]) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in (x,y), $x_0 \in [a,b]$, allora esiste $\delta > 0$ con $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a,b]$ tale che esiste $y \in C^1([a,b])$ soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Proposizione 11.9 (Soluzione di equazioni lineari)**.** *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $y : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I, a, b funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue, allora le soluzioni dell'equazione $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ sono della forma $y(x) = e^{A(x)}\left(C + \int e^{-A(s)}b(s)ds\right)$ con $A(x) = \int a(x)dx$ e $C \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione.
Consideriamo l'equazione $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, moltiplicando entrambi i membri per $e^{-A(x)}$ otteniamo

$$e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = (e^{-A(x)}y(x))' = e^{-A(x)}b(x).$$

Integrando entrambi i membri quindi

$$e^{-A(x)}y(x) = \int e^{-A(s)}b(s)ds + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

da cui

$$y(x) = e^{A(x)}\left(C + \int e^{-A(s)}b(s)ds\right).$$

□

Corollario 11.10. *Sotto le stesse ipotesi, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione $y(x) = e^{A(x)}\left(e^{-A(x)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)}b(s)ds\right)$ con $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)ds$. Inoltre tale soluzione è globale.

Definizione 11.11 (Soluzione massimale)**.** Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, una soluzione $y \in C^1(I)$ di un problema di Cauchy si dice *massimale* se per ogni soluzione $z \in C^1(I')$, dove I' è un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$, si ha $I' \subseteq I$.

Osservazione 11.12. Nelle ipotesi del Teorema di esistenza e unicità locale si ha un'unica soluzione massimale del problema di Cauchy.

Teorema 11.13. *Dati $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in (x,y) e localmente lipschitziana in y e il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = x_0 \end{cases},$$

posta $y \in C^1([a',b'])$ la soluzione massimale del sistema si ha

1. *$b' = b$ oppure ($b' < b$ e $\lim_{x \to b'^-} y(x) \in \{c,d\}$)*
2. *$a' = a$ oppure ($a' > a$ e $\lim_{x \to a'^+} y(x) \in \{c,d\}$)*

Dimostrazione.
Mostriamo il primo punto, la dimostrazione per il secondo è analoga. Se $b' < b$ supponiamo per assurdo che non esista $\lim_{x \to b'^-} y(x)$, cioè che

$$\limsup_{x \to b'^-} y(x) = \ell^+ > \liminf_{x \to b'^-} y(x) = \ell^-,$$

pertanto esistono a_n, b_n successioni a valori in $[a', b']$ che tendono a b^- tali che $\lim_{n \to +\infty} y(a_n) = \ell^+$ e $\lim_{n \to +\infty} y(b_n) = \ell^-$. Per il Teorema di Lagrange allora esiste una successione $x_n \in (a_n, b_n)$ tale che $y'(x_n) = \dfrac{y(b_n) - y(a_n)}{b_n - a_n}$, in particolare $|y'(x_n)| = \left|\dfrac{y(b_n) - y(a_n)}{b_n - a_n}\right|$. Poiché $[a', b']$ è un intervallo limitato e $b' < b$ si ha che $\lim_{n \to +\infty} |b_n - a_n| = 0$, pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} |y'(x_n)| = \lim_{n \to +\infty} |f(x_n, y(x_n))| = +\infty.$$

D'altra parte, posta $\delta > 0$ la costante garantita dal Teorema di esistenza e unicità locale e fissato $\varepsilon > 0$ si ha che

$$|f(x_n, y(x_n)| \leq \max_{[b'-\delta, b'] \times [\ell^+ - \varepsilon, \ell^- + \varepsilon]} |f(x, y(x))| \in \mathbb{R},$$

che è assurdo. Pertanto si ha che $\lim_{x \to b'^-} y(x) = \alpha \in [c, d]$, in particolare $\alpha \in \{c, d\}$ in quanto y è soluzione massimale del problema di Cauchy.

□

Osservazione 11.14. Possiamo estendere il teorema al caso $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mostrando che

1. $b' = +\infty$ oppure ($b' \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to b'^-} y(x) = \pm\infty$)
2. $a' = -\infty$ oppure ($a' \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to a'^+} y(x) = \pm\infty$)

Teorema 11.15 (Confronto)**.** *Date $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua in (x, y) e localmente lipschitziana in y, y_1, y_2 funzioni da $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo in $\mathbb{R}$, se y_1, $y_2 \in C^1(I)$ e sono soluzioni dell'equazione $y' = f(x, y)$ allora si ha una delle seguenti:*

1. *$y_1(x) > y_2(x)$ $\forall x \in I$*
2. *$y_1(x) < y_2(x)$ $\forall x \in I$*
3. *$y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in I$*

Dimostrazione.
Supponiamo che esista $x_0 \in I$ tale che $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1'(x) = f(x, y_1(x)) \\ y_1(x_0) = y_2(x_0) \end{cases}.$$

Per il Teorema di esistenza e unicità esiste un'unica soluzione del sistema in un intorno di x_0, pertanto $y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in I$. Viceversa, se non esiste $x_0 \in I$ tale che $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ allora si ha $y_1(x) > y_2(x)$ oppure $y_1(x) < y_2(x)$ $\forall x \in I$.

□

Definizione 11.16 (Soprasoluzione)**.** Data $y' = f(x, y)$ un'equazione differenziale ordinaria, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, diciamo che $\tilde{y} \in C^1(I)$ è una *soprasoluzione* di $y' = f(x, y)$ se $\tilde{y}'(x) \geq f(x, y) \forall x \in I$. Diciamo che $\tilde{y} \in C^1(I)$ è una *soprasoluzione stretta* se $\tilde{y}'(x) > f(x, y)$ $\forall x \in I$.

Definizione 11.17 (Sottosoluzione)**.** Data $y' = f(x, y)$ un'equazione differenziale ordinaria, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, diciamo che $\tilde{y} \in C^1(I)$ è una *sottosoluzione* di $y' = f(x, y)$ se $\tilde{y}'(x) \leq f(x, y) \forall x \in I$. Diciamo che $\tilde{y} \in C^1(I)$ è una *sottosoluzione stretta* se $\tilde{y}'(x) < f(x, y)$ $\forall x \in I$.

Teorema 11.18. *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, y_1, y_2 funzioni da I in $\mathbb{R}$, $y' = f(x, y)$ un'equazione differenziale ordinaria, se y_1 è una soprasoluzione di $y' = f(x, y)$ e y_2 è una sottosoluzione di $y' = f(x, y)$, di cui una delle due stretta, abbiamo che*

1. *se esiste* $x_0 \in I$ *tale che* $y_1(x_0) \geq y_2(x_0)$ *allora* $y_1(x) > y_2(x)$ $\forall x > x_0$

2. *se esiste* $x_0 \in I$ *tale che* $y_1(x_0) \leq y_2(x_0)$ *allora* $y_1(x) < y_2(x)$ $\forall x < x_0$

Dimostrazione.
Dimostriamo il primo punto, per il secondo si ragiona in modo analogo. Se $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ allora si ha $y_1'(x_0) > y_2'(x_0)$, pertanto esiste $\delta > 0$ tale che $y_1(x) > y_2(x)$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Possiamo quindi supporre $y_1(x_0) > y_2(x_0)$. Se per assurdo che esiste $x_1 > x_0$ tale che $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ e $y_1(x) > y_2(x)$ $\forall x \in (x_0, x_1)$, per il Teorema di Cauchy esiste $\xi \in (x_0, x_1)$ tale che

$$y_1'(\xi)(y_2(x_1) - y_2(x_0)) = y_2'(\xi)(y_1(x_1) - y_1(x_0)),$$

da cui $y_1'(\xi) < y_2'(\xi)$, che è assurdo.

□

11.1.1 Equazioni differenziali lineari

Proposizione 11.19 (Soluzione di equazioni lineari)**.** *Dati* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo,* $y : I \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su I, a, b funzioni da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *continue, allora le soluzioni dell'equazione* $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ *sono della forma* $y(x) = Ce^{A(x)} + \int e^{A(x)-A(s)}b(s)ds$ *con* $A(x) = \int a(x)dx$ *e* $C \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.
Consideriamo l'equazione $y'(x) = a(x)y(x)+b(x)$, moltiplicando entrambi i membri per $e^{-A(x)}$ otteniamo

$$e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = (e^{-A(x)}y(x))' = e^{-A(x)}b(x).$$

Integrando entrambi i membri quindi

$$e^{-A(x)}y(x) = \int e^{-A(s)}b(s)ds + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

da cui

$$y(x) = Ce^{A(x)} + \int e^{A(x)-A(s)}b(s)ds.$$

□

Corollario 11.20. *Sotto le stesse ipotesi, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione $y(x) = y_0e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(s)}b(s)ds$ *con* $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)ds$. *Inoltre tale soluzione è globale.*

Teorema 11.21 (Esistenza globale)**.** *Data* $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallo, soluzione massimale di un'equazione differenziale ordinaria* $y' = f(x, y(x))$, *se* $|f(x, y(x))| \leq a(x) + b(x)|y(x)|$ *con a, b funzioni continue e positive, allora* $\tilde{y}$ *è definita globalmente.*

Dimostrazione.
Le equazioni lineari $y' = a(x) \pm b(x)y$ hanno soluzioni esplicite definite globalmente, pertanto per confronto si ha la tesi.

□

11.1.2 Equazioni differenziali a variabili separabili

Definizione 11.22 (Equazione a variabili separabili)**.** Diciamo che un'equazione differenziale del primo ordine della forma $y'(x) = F(x, y(x))$ è a *variabili separabili* se esistono due funzioni $a : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ continue e tali che $F(x, y(x)) = f(y(x))a(x)$.

Sotto queste ipotesi, consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e supponiamo che f sia localmente lipschitztiana sul suo dominio. Osserviamo che se $f(y_0) = 0$ abbiamo che $y(x) = y_0$ $\forall x$ è una soluzione costante. Se $f(y_0) \neq 0$, poniamo J_0 la componente connessa di $\{y \mid f(y) \neq 0\}$ contenente y_0, osserviamo che f non cambia segno su J_0. Possiamo scrivere quindi

$$\frac{y'(x)}{f(y(x))} = a(x) \ \forall y(x) \in J_0.$$

Poste G una primitiva di $\dfrac{1}{f}$ e A una primitiva di a, integrando entrambi i membri dell'equazione sull'intervallo (x_0, x) ricaviamo

$$G(y(x)) - G(y_0) = A(x) - A(x_0),$$

da cui

$$y(x) = G^{-1}(G(y_0) + A(x) - A(x_0))$$

per x tale che $G(y_0) + A(x) - A(x_0) \in G(J_0)$.

11.2 Equazioni lineari di ordine superiore

Possiamo estendere il Teorema di esistenza e unicità locale a funzioni a valori vettoriali, o analogamente a sistemi di equazioni differenziali:

Teorema 11.23 (Esistenza e unicità locale generalizzato)**.** *Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $J \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : I \times J \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua in (x, y) e localmente lipschitziana in y, esiste un'unica soluzione locale al problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Inoltre se f è definita su $I \times \mathbb{R}^n$ ed esistono a, b funzioni continue su I non negative tali che $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$ allora tale soluzione è definita globalmente su I.

Consideriamo un'equazione differenziale della forma

$$a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x),$$

con a_i, b funzioni continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ $\forall i \in \{0 \ldots, n\}$ e u una funzione scalare incognita derivabile n volte su I. Consideriamo il caso in cui $a_n(x) > 0$ $\forall x \in I$, a meno di dividere per a_n possiamo quindi considerare l'equazione

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x).$$

Poniamo $y_j(x) = u^{(j)}(x)$ per $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, abbiamo che il vettore $y(x) = (y_0(x), \ldots, y_{n-1}(x))$ è soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} y_j'(x) = u^{(j+1)}(x) & 0 \leq j \leq n-2 \\ y_{n-1}'(x) = -\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)u^{(j)}(x) + b(x) \end{cases}.$$

Possiamo quindi scrivere $y' = A(x)y + B(x)$ con

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \ldots & -a_{n-2}(x) & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi una corrispondenza tra le soluzioni del sistema e le soluzioni dell'equazione differenziale iniziale, in particolare $y = (y_0, \dots, y_{n-1})$ è soluzione del sistema se e solo se $u = y_0$ è soluzione dell'equazione. Si dimostra che $f(x, y) = A(x)y + B(x)$ rispetta le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità locale e che esistono α, β funzioni continue su I non negative tali che $|f(x, y)| \leq \alpha(x)|y| + \beta(x)$, pertanto la soluzione è definita globalmente su I.

Per semplificare la notazione indichiamo con L l'operatore lineare tale che

$$L\varphi = \varphi^{(n)} + a_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\varphi' + a_0(x)\varphi$$

per ogni funzione scalare φ derivabile n volte su I. Possiamo quindi scrivere l'equazione come $Lu = b$.

Proposizione 11.24 (Insieme delle soluzioni)**.** *Con le notazioni di sopra, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Lu = b$ è uno spazio affine di dimensione n.*

Dimostrazione.
Consideriamo due soluzioni u_1, u_2 dell'equazione $Lu = b$, sia $w = u_1 - u_2$. Poiché L è un operatore lineare abbiamo $Lw = 0$, d'altra parte l'insieme delle soluzioni di $Lw = 0$ è $\ker L$ che è uno spazio vettoriale, pertanto l'insieme delle soluzioni delle equazione iniziale è $b + \ker L$. Mostriamo che la sua dimensione è n esibendone una base. Sia w_k una soluzione per il sistema

$$\begin{cases} Lw = 0 \\ w^{(j)}(x_0) = \delta_{kj} \end{cases} \quad \text{con } \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases},$$

mostriamo che l'insieme $\{w_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ è un insieme linearmente indipendente. Indichiamo l'operatore lineare di derivazione con D, dati $\mu_0, \dots, \mu_{n-1} \in \mathbb{R}$ se $\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k = 0$ allora, per $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, si ha

$$D^\ell \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k^{(\ell)} = 0.$$

Valutando in x_0 abbiamo

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k^{(\ell)}(x_0) = \mu_\ell = 0 \quad \forall \ell \in \{0, \dots, n-1\},$$

pertanto si ha la lineare indipendenza. Consideriamo adesso una funzione u tale che $Lu = 0$ e $\mu_0, \dots, \mu_{n-1} \in \mathbb{R}$ tali che $u^{(k)}(x_0) = \mu_k$ per $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Sia $\overline{u} = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k$, osserviamo che $\overline{u} \in \ker L$ in quanto combinazione lineare di elementi di $\ker L$, inoltre $\overline{u}^{(\ell)}(x_0) = \mu_\ell$, pertanto $\overline{u}$ soddisfa lo stesso problema di Cauchy di u, pertanto $\overline{u} = u$ per l'unicità della soluzione. Abbiamo quindi che $\ker L$ è uno spazio vettoriale di dimensione n, pertanto lo è anche $b + \ker L$.

□

Osservazione 11.25. Lo spazio delle soluzioni di un'equazione lineare non omogenea si ottiene traslando di una soluzione particolare lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenee.

11.2.1 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Con le stesse notazioni di prima, consideriamo il caso in cui $a_{n-1}, \dots, a_0$ siano funzioni costanti a valori in $\mathbb{C}$. Consideriamo il polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{C}[\lambda],$$

osserviamo che possiamo scrivere l'equazione come

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = P(D)u.$$

Consideriamo la fattorizzazione di P in irriducibili

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \ \lambda_j \in \mathbb{C} \ \forall j \in \{1, \dots, r\},$$

dove λ_j sono radici distinte e m_j sono le relative molteplicità algebriche. Osserviamo che $\ker(D - \lambda_j) \subseteq \ker(P(D)) \ \forall j \in \{1, \dots, r\}$.

Lemma 11.26.
$$\ker(D^m) = \{q(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg q < m\}$$

Dimostrazione.
Osserviamo che $\dim \ker(D^m) = m$ e che l'insieme $\{q(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg q < m\}$ è contenuto in $\ker(D^m)$, pertanto si ha l'uguaglianza.

$\square$

Lemma 11.27. *Consideriamo l'applicazione E_λ tale che $E_\lambda(u(x)) = u(x)e^{\lambda x}$, allora*

1. $D - \lambda = E_\lambda \circ D \circ E_{-\lambda}$
2. $(D - \lambda)^m = E_\lambda \circ D^m \circ E_{-\lambda}$

Dimostrazione.

1. Osserviamo che
$$(E_\lambda \circ D \circ E_{-\lambda})u(x) = E_\lambda(D(u(x)e^{-\lambda x})) = E_\lambda(u'(x) - \lambda u(x))e^{-\lambda x} = u'(x) - \lambda u(x) = (D - \lambda)u(x).$$
2. Segue dal fatto che E_λ e $E_{-\lambda}$ sono tra loro inverse.

$\square$

Lemma 11.28.
$$\ker(D - \lambda)^m = \{q(x)e^{\lambda x} \mid q \in \mathbb{C}[x] \wedge \deg q < m\}$$

Dimostrazione.
Osserviamo che i due spazi hanno la stessa dimensione, è quindi sufficiente mostrare un'inclusione. Per quanto mostrato prima abbiamo
$$(D - \lambda)^m q(x)e^{\lambda x} = (E_\lambda \circ D^m \circ E_{-\lambda})(q(x)e^{\lambda x}) = (E_\lambda \circ D^m)(q(x)) = 0,$$
pertanto si ha l'uguaglianza.

$\square$

Lemma 11.29. *Se $\lambda \neq \mu$ allora $D - \mu : \ker(D - \lambda)^m \to (D - \lambda)^m$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Dimostrazione.
Consideriamo $u(x) = q(x)e^{\lambda x}$, con $\deg q < m$, abbiamo
$$\begin{aligned}(D - \mu)(u(x)) &= (E_\mu \circ D \circ E_{-\mu})(q(x)e^{\lambda x}) = (E_\mu \circ D)(q(x)e^{(\lambda-\mu)x}) = \\ &= E_\mu((q'(x) - (\lambda - \mu)q(x))e^{(\lambda-\mu)x}) = (q'(x) - (\lambda - \mu)q(x))e^{\lambda x}.\end{aligned}$$
Osserviamo che $\deg q = \deg((\lambda-\mu)q)$ in quanto $\lambda \neq \mu$ e che $\deg q' < \deg q$, pertanto $q'(x)-(\lambda-\mu)q(x) = 0$ se e solo se $q(x) = 0$, pertanto $D - \mu$ è iniettiva, quindi un isomorfismo.

$\square$

Teorema 11.30.
$$\ker P(D) = \bigoplus_{j=1}^{r} \ker(D - \lambda_j)^{m_j}$$

Dimostrazione.
Consideriamo l'applicazione $V : \prod_{j=1}^{r} \ker(D - \lambda_j)^{m_j} \to \ker P(D)$ tale che $V(v_1, \dots, v_r) = v_1 + \cdots + v_r$. Fissato $j \in \{1, \dots, r\}$ scriviamo $P(\lambda) = \hat{P}_j(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$. Se $v_1+\cdots+v_r = 0$ allora $P(D)(v_1+\cdots+v_r) = 0$, in particolare $\hat{P}_j(D)(v_1+\cdots+v_r) = \hat{P}_j(D)(v_j) = 0$. Osserviamo che $\hat{P}_j(D)$ è composizione di isomorfismi da $\ker(D - \lambda_j)^{m_j}$ in $\ker(D - \lambda_j)^{m_j}$, pertanto è anch'esso un isomorfismo, da cui $v_j = 0$. Abbiamo quindi che V è un isomorfismo per uguaglianza dimensionale, da cui la tesi.

$\square$

Supponiamo che $\xi = \alpha + i\beta$ sia una radice non reale di $P(\lambda)$ di molteplicità m, osserviamo che anche $\overline{\xi}$ è una radice di $P(\lambda)$ di molteplicità m. È quindi sufficiente studiare

$$\begin{aligned}(\ker(D-\xi)^m \oplus \ker(D-\overline{\xi})^m) \cap C^\infty(I,\mathbb{R}) =\\ = \{e^{\alpha x}(q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x)) \mid q_1, q_2 \in \mathbb{R}[x] \wedge \deg q_1, \deg q_2 < m\}.\end{aligned}$$

Infatti se $e^{\xi x}$, $e^{\overline{\xi}x}$ sono soluzioni dell'equazione, anche $\dfrac{e^{\xi x} + e^{\overline{\xi}x}}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta x)$, $\dfrac{e^{\xi x} - e^{\overline{\xi}x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ sono soluzioni, che possiamo utilizzare per costruire una base reale dello spazio

$$\ker(D-\xi)^m \oplus \ker(D-\overline{\xi})^m$$

moltiplicando per opportuni polinomi.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione $P(D)(u) = b$ con $b \in \ker(D-\mu)^\ell$.

Proposizione 11.31. *Data l'equazione $P(D)(u) = b$ con $b \in \ker(D-\mu)^\ell$,*

1. *se $P(\mu) \neq 0$ allora esiste un'unica soluzione dell'equazione della forma $q(x)e^{\mu x}$ con $q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg q < \ell$*
2. *se $P(\mu) = 0$ allora esiste un'unica soluzione dell'equazione della forma $x^m q(x)e^{\mu x}$ con $q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg q < \ell$, dove m è la molteplicità algebrica di μ come radice di P*

Dimostrazione.

1. Osserviamo che se $\lambda \neq \mu$ allora $D - \lambda : \ker(D-\mu)^\ell \to (D-\mu)^\ell$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare, se consideriamo λ_i una radice di P abbiamo che $D - \lambda_i : \ker(D-\mu)^\ell \to (D-\mu)^\ell$ è un isomorfismo, pertanto anche $P(D) = (D-\lambda_1) \circ \cdots \circ (D-\lambda_r)$ è un isomorfismo. In particolare se $b \in \ker(D-\mu)^\ell$ esiste un'unica funzione $u \in \ker(D-\mu)^\ell$ tale che $P(D)(u) = b$. Inoltre $u(x) = q(x)e^{\mu x}$ con $q \in \mathbb{R}[x]$ e $\deg q < \ell$ in quanto $(D-\mu)^\ell = E_\mu \circ D^\ell \circ E_{-\mu}$.

2. Se $P(\mu) = 0$ allora si ha $\mu = \lambda_i$ per qualche $i \in \{1, \ldots, r\}$. Scriviamo $P(D) = \hat{P}(D)(D-\mu)^m$, con m la molteplicità algebrica di μ. Consideriamo l'applicazione X tale che $X(u(x)) = xu(x)$, osserviamo che $P(D) : X^m(\ker(D-\mu)^\ell) \to \ker(D-\mu)^\ell$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, infatti

$$X^m \ker(D-\mu)^\ell \overset{(D-\mu)^m}{\longrightarrow} \ker(D-\mu)^\ell \overset{\hat{P}(D)}{\longrightarrow} \ker(D-\mu)^\ell.$$

Pertanto esiste un'unica soluzione della forma $u(x) = x^m q(x)e^{\mu x}$ con $q \in \mathbb{R}[x]$ e $\deg q < \ell$.

□

11.2.2 Metodo di variazione delle costanti

Illustriamo solo per le equazioni del secondo ordine un metodo per determinare una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare.

Sia L un operatore lineare tale che $L(u) = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)$, con a_1, a_0 funzioni continue, cerchiamo le soluzioni dell'equazione $L(u) = b$. Supponiamo che esistano w_1, w_2 soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $L(w) = 0$, cerchiamo una soluzione della forma $u(x) = c_1(x)w_1(x) + c_2(x)w_2(x)$ con c_1, c_2 funzioni incognite tali che $c_1'w_1 + c_2'w_2 = 0$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}u' &= c_1'w_1 + c_2'w_2 + c_1w_1' + c_2w_2' = c_1w_1' + c_2w_2'\\ u'' &= c_1'w_1' + c_2'w_2' + c_1w_1'' + c_2w_2''.\end{aligned}$$

Pertanto $L(u) = b$ se e solo se $c_1L(w_1) + c_2L(w_2) + c_1'w_1' + c_2'w_2' = c_1'w_1' + c_2'w_2' = b$. La risoluzione dell'equazione è quindi ridotta a quella del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} c_1'w_1 + c_2'w_2 = 0 \\ c_1'w_1' + c_2'w_2' = b \end{cases},$$

che, scritto in forma matriciale, è equivalente all'equazione

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice è invertibile, infatti w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti, pertanto anche w_1' e w_2' lo sono in quanto D è un operatore lineare. La matrice ha quindi rango massimo, cioè è invertibile. Posto $\Delta = w_1 w_2' - w_1' w_2$ il determinante, invertendo la matrice otteniamo

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} w_2' & -w_2 \\ -w_1' & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix},$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{-1}{\Delta} w_2 b \\ c_2' = \dfrac{1}{\Delta} w_1 b \end{cases}.$$

Integrando le due equazioni possiamo quindi determinare c_1, c_2 a meno di una costante.